

6

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

Б.П.吉米多维奇

数学分析

习题集题解

第四版



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

责任编辑 宋 涛 邱 蕾

封面设计 庞 婕 孙 佳

新版推荐

经典 B. П. 吉米多维奇数学习题集系列

数学分析习题集题解 (共六册)

- | | |
|--------------------|------------|
| 1 分析引论 | 定价: 19.00元 |
| 2 单变量函数的微分学 | 定价: 19.00元 |
| 3 不定积分 定积分 | 定价: 20.00元 |
| 4 级数 | 定价: 19.00元 |
| 5 多变量函数的微分法 带参数的积分 | 定价: 22.00元 |
| 6 重积分和曲线积分 | 定价: 19.00元 |

数学分析习题集精选精解 定价: 39.00元

数学分析习题集——提示·解题思路·答案 定价: 39.00元

高等数学习题精选精解 定价: 39.80元

ISBN 978-7-5331-5895-8



9 787533 158958

定价: 19.00 元

6

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琼 主审

Б.П.吉米多维奇
数学分析
习题集题解

第四版

● 山东科学技术出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

Б. П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 6/费定晖, 周学圣编演. —4 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2012
ISBN 978-7-5331-5895-8

I. ①吉... II. ①费... ②周... III. ①数学分析—高等学校 题解 IV. ①O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120112 号

**Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解 6**

出版者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路16号
邮编: 250002 电话: (0531) 82098088
网址: www.lkj.com.cn
电子邮件: sdkj@sdpress.com.cn

发行者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路16号
邮编: 250002 电话: (0531) 82098071

印刷者: 山东新华印刷厂潍坊厂

地址: 潍坊市潍州路753号
邮编: 261031 电话: (0536) 2116806

开本: 787 mm × 1092mm 1/16

印张: 13.5

版次: 2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5895-8

定价: 19.00 元

第四版前言

本书自 1979 年出版发行以来,历经 30 多个春秋,一直畅销不衰,深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下,对全书我不断地修订和补充,不断地修正错误,不断地替换更为简洁的解法和证明,力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性,以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书,对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练,感到获益匪浅,赞誉其为学习数学分析“不可替代”之图书,对此我们倍感欣慰,鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请,并得到郭大钧教授的大力支持,仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作,以适应文化建设繁荣发展的需要,更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作:

第一,为全书 4462 题中的近三成的习题,根据题型的不同,在原题解的前面,分别或给出提示,或给出解题思路,或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题,怎样下手求解;启发读者怎样总结解题的规律;启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论,开拓视野,活跃思路;帮助读者逐步解决学习中的困难,为他们在学習过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二,根据当前的语言习惯,对全书的文字作了较多的润色,使其表述更加准确,更加简洁凝练。

第三,改正了第三版中的个别印刷错误,修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四,根据国家相关标准,规范了有关术语和数学式子的表达;并对全书使用的外国人名,按照现在的标准或通用译法重新翻译人名,以求统一标准。

第五,对全书的版面和开本重新进行了调整,使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者,懂得只有通过个人的独立思考,加上勤学苦练才能取得成功,“只看不练假把式”,数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的,我们编写本书,就是希望能

对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好是不要先看题解,更不要查抄解答和答案,而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考,必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题,然后再查看书中是怎样解答的,比较自己的解答和书中解答的异同,从中找出差距,找出自己的问题所在,甚至找出书中解答的错误和不足之处,进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能,任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力,责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血,在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订,面对如此庞大的图书,限于本人水平,书中难免有错误和不当之处,敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正,不胜感激,并在新版中改正。

费定晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学

出版说明

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自 50 年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书 4462 题的所有解答汇编成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思考的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

1979 年于济南

目录

第八章 多重积分和曲线积分	1
§ 1. 二重积分	1
§ 2. 面积的计算法	27
§ 3. 体积的计算法	35
§ 4. 曲面面积的计算法	44
§ 5. 二重积分在力学上的应用	49
§ 6. 三重积分	58
§ 7. 利用三重积分计算体积	67
§ 8. 三重积分在力学上的应用	76
§ 9. 二重和三重广义积分	86
§ 10. 多重积分	106
§ 11. 曲线积分	117
§ 12. 格林公式	135
§ 13. 曲线积分在物理学上的应用	146
§ 14. 曲面积分	155
§ 15. 斯托克斯公式	165
§ 16. 奥斯特罗格拉茨基公式	169
§ 17. 场论初步	182

第八章 多重积分和曲线积分

§ 1. 二重积分

1° 二重积分的直接计算法 所谓连续函数 $f(x, y)$ 在有限封闭可求积二维区域 Ω 上的二重积分, 指的是

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max |\Delta y_j| \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, 而求和是对所有使 $(x_i, y_j) \in \Omega$ 的那些 i, j 值进行的.

若区域 Ω 由以下不等式给出:

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则相应的二重积分可按以下公式来计算:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

2° 二重积分中的变量代换 若连续可微函数

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

给出平面 Oxy 上的有限闭区域 Ω 与平面 Ouv 上的区域 Ω' 之间的一一映射, 且雅可比行列式

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

的符号在 Ω 内保持不变 (可能在零测度集上有例外), 则成立以下公式:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f[x(u, v), y(u, v)] |I| du dv.$$

例如, 根据公式 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ 变换为极坐标 r 和 φ 时, 有

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

【3901】 把积分 $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy dx dy$ 当作积分和的极限, 用直线

$$x = \frac{i}{n}, \quad y = \frac{j}{n} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1)$$

把积分域分为许多正方形, 并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值, 计算此积分.

解 由于 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} \rightarrow \frac{1}{4} \quad (n \rightarrow \infty),$

其中 $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2},$

故 $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy dx dy = \frac{1}{4}.$

【3902】 用直线 $x = 1 + \frac{i}{n}, \quad y = 1 + \frac{2j}{n} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n)$

把区域 $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$ 分为许多矩形. 作出函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在此区域内的下积分和 \underline{S} 与上积分和 \overline{S} . 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上积分和与下积分和的极限等于什么?

解 下积分和 $\underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \left[\left(1 + \frac{i}{n} \right)^2 + \left(1 + \frac{2j}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \right\}$

$$= \frac{2n}{n^2} \left[n + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + n + \frac{4}{n} \sum_{j=0}^{n-1} j + \frac{4}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \right] = \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2},$$

其中 $\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}, \quad \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6};$

而上积分和 $\bar{S} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \left[\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2j}{n}\right)^2 \right] \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \right\} = \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}.$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, \underline{S} 与 \bar{S} 的极限均等于 $\frac{40}{3} = 13 \frac{1}{3}.$

【3903】 用一组顶点 A_{ij} 位于整数点的正方形作为积分域的近似域, 并取被积函数在每个正方形距原点最远的顶点之值, 近似地计算积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$ 并与精确值加以比较.

解 由题意知, 应取的正方形顶点为 $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3),$ 故利用对称性知

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} &\approx \frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{2}{\sqrt{34}} + \frac{2}{\sqrt{41}} + \frac{1}{\sqrt{32}} + \frac{2}{\sqrt{37}} + \frac{2}{\sqrt{44}} + \frac{1}{\sqrt{42}} + \frac{2}{\sqrt{49}} \\ &\approx 0.196 + 0.371 + 0.343 + 0.312 + 0.177 + 0.329 + 0.302 + 0.154 + 0.285 \approx 2.470, \end{aligned}$$

即 $\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} \approx 9.880.$

下面计算积分的精确值:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} = 4 \int_0^5 \ln(y + \sqrt{24+x^2+y^2}) \Big|_0^{\sqrt{25-x^2}} dx = 4 \int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2} + 7) dx - 2 \int_0^5 \ln(24+x^2) dx.$$

由于 $\int \ln(24+x^2) dx = x \ln(24+x^2) - \int \frac{2x^2}{24+x^2} dx = x \ln(24+x^2) - 2x + \frac{24}{\sqrt{6}} \arctan \frac{x}{\sqrt{24}} + C.$

从而, $2 \int_0^5 \ln(24+x^2) dx = \left[2x \ln(24+x^2) - 4x + \frac{48}{\sqrt{6}} \arctan \frac{x}{\sqrt{24}} \right]_0^5 = 20 \ln 7 - 20 + 8\sqrt{6} \arctan \frac{5}{\sqrt{24}};$

又 $4 \int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2} + 7) dx = 4 \left[x \ln(\sqrt{25-x^2} + 7) \right]_0^5 + 4 \int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2} + 7) \sqrt{25-x^2}}$
 $= 20 \ln 7 + 4 \int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2} + 7) \sqrt{25-x^2}},$

再令 $x = 5 \sin t$, 有

$$\begin{aligned} \int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2} + 7) \sqrt{25-x^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-25 \cos^2 t + 25}{5 \cos t + 7} dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 \cos t - 7) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{24}{5 \cos t + 7} dt \\ &= (7t - 5 \sin t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 24 \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \tan \frac{t}{2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7\pi}{2} - 5 - 4\sqrt{6} \arctan \frac{2}{\sqrt{24}}. \end{aligned}$$

从而, $4 \int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2} + 7) dx = 20 \ln 7 + 14\pi - 20 - 16\sqrt{6} \arctan \frac{2}{\sqrt{24}}.$

注意到 $2 \arctan \frac{2}{\sqrt{24}} + \arctan \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{\pi}{2},$

最后便得到 $\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} = 14\pi - 4\sqrt{24} \left(2 \arctan \frac{2}{\sqrt{24}} + \arctan \frac{5}{\sqrt{24}} \right) = 2\pi(7 - \sqrt{24}) \approx 13.19.$

将精确值与近似值作比较, 显见误差较大, 其原因在于有不少不是正方形的区域都被忽略, 因而产生较大的绝对误差 4.31 及较大的相对误差 $\frac{4.31}{13.19} \approx 32.7\%.$

注意 求 $\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$ 的精确值若采用极坐标则较为简单:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 24} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{24}} \frac{r dr}{\sqrt{24+r^2}} = 2\pi(7 - \sqrt{24}).$$

但按原习题集的安排,似应在 3937 题以后才开始使用极坐标,故本题仍用直角坐标进行计算.

【3904】 用直线 $x=\text{常数}$, $y=\text{常数}$, $x+y=\text{常数}$ 把积分域 S 分为四个相同的三角形,并取被积函数在每个三角形的质心之值,近似地计算积分

$$\iint_S \sqrt{x+y} dS.$$

其中 S 是以直线 $x=0$, $y=0$ 及 $x+y=1$ 为边的三角形.

解 我们只须以 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ 及 $x+y=\frac{1}{2}$ 分积分域 S , 即得四个相同的三角形, 它们的面积均为 $\frac{1}{8}$, 质心为 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ 及 $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3})$, 于是, 得此积分的近似值为

$$\iint_S \sqrt{x+y} dS \approx \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} + \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} + 2\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} \right) \approx \frac{1}{8} (0.577 + 0.816 + 2 \cdot 0.912) \approx 0.402,$$

其精确值为 $\iint_S \sqrt{x+y} dS = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{x+y} dy = \frac{2}{3} \int_0^1 (1-x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{2}{5} = 0.4.$

【3905】 把积分域 $S: \{x^2+y^2 \leq 1\}$ 分为有限个直径小于 δ 的可求积的子区域 $\Delta S_i (i=1, 2, \dots, n)$, 怎样的值 δ 能保证不等式

$$\left| \iint_S \sin(x+y) dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i+y_i) \Delta S_i \right| < 0.001$$

成立? 其中 $(x_i, y_i) \in \Delta S_i$.

解 记函数 $\sin(x+y)$ 在 ΔS_i 中的振幅为 ω_i , 则

$$\begin{aligned} \left| \iint_S \sin(x+y) dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i+y_i) \Delta S_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta S_i} [\sin(x+y) - \sin(x_i+y_i)] dS \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta S_i} |\sin(x+y) - \sin(x_i+y_i)| dS \leq \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta S_i} \omega_i dS = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta S_i. \end{aligned}$$

由于积分域 $S: \{x^2+y^2 \leq 1\}$ 的面积等于 π , 故只要 $\omega_i < \frac{0.001}{\pi}$, 便能满足原不等式的要求. 但因为

$$\begin{aligned} \omega_i &= \sup_{\substack{(x'_i, y'_i) \in \Delta S_i \\ (x''_i, y''_i) \in \Delta S_i}} |\sin(x'_i+y'_i) - \sin(x''_i+y''_i)| \leq \sup_{\substack{(x'_i, y'_i) \in \Delta S_i \\ (x''_i, y''_i) \in \Delta S_i}} |(x'_i+y'_i) - (x''_i+y''_i)| \\ &\leq \sup_{\substack{(x'_i, y'_i) \in \Delta S_i \\ (x''_i, y''_i) \in \Delta S_i}} [|x'_i - x''_i| + |y'_i - y''_i|] \leq \sup_{\substack{(x'_i, y'_i) \in \Delta S_i \\ (x''_i, y''_i) \in \Delta S_i}} \sqrt{2[(x'_i - x''_i)^2 + (y'_i - y''_i)^2]} = \sqrt{2} \delta_i, \end{aligned}$$

故只要取

$$\delta < \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \times 0.001 \approx 0.00022,$$

即有

$$\left| \iint_S \sin(x+y) dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i+y_i) \Delta S_i \right| < 0.001.$$

*) 对于任意非负实数 a, b 有

$$2ab \leq a^2 + b^2 \quad \text{或} \quad (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

从而, $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$.

计算积分:

【3906】 $\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy.$

解 $\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = 1.$

【3907】 $\int_1^2 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy.$

$$\text{解} \quad \int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy' dy - \int_0^1 \left(\frac{x^1}{3} - \frac{x^7}{3} \right) dx = \frac{1}{40}.$$

$$\text{【3908】} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr.$$

$$\text{解} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{a^3}{3} \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{3}.$$

【3909】 设 R 为矩形 $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$, 函数 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 在相应区间上连续, 证明等式:

$$\iint_R X(x)Y(y) dx dy = \int_a^A X(x) dx \int_b^B Y(y) dy.$$

证 根据在矩形域的情况下化二重积分为逐次积分的计算方法, 不妨先对 y 后对 x 积分, 即得

$$\iint_R X(x)Y(y) dx dy = \int_a^A dx \int_b^B X(x)Y(y) dy = \int_a^A X(x) dx \int_b^B Y(y) dy.$$

$$\text{【3910】} \quad \text{设 } f(x, y) = F''_{xy}(x, y), \text{ 计算 } I = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy.$$

解 不妨按先对 y 后对 x 积分的顺序计算, 即得

$$I = \int_a^A [F'_x(x, B) - F'_x(x, b)] dx = F(x, B) \Big|_a^A - F(x, b) \Big|_a^A = F(A, B) - F(a, B) - F(A, b) + F(a, b).$$

【3911】 设 $f(x)$ 为闭区间 $a \leq x \leq b$ 内的连续函数, 证明不等式:

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx,$$

且仅当 $f(x) = \text{常数}$ 时等号成立.

$$\text{证明思路} \quad \text{首先, 证明不等式: } \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx,$$

事实上, 只要在不等式 $\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy \geq 0$ 中将被积函数 $[f(x) - f(y)]^2$ 展开, 并注意 $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(y) dy$, 即可获证. 当 $f(x) = \text{常数}$ 时, 显然上式中 等号成立.

其次, 证明: 当 $\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 = (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$ 时, 则 $f(x) = \text{常数}$. 事实上, 此时有

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy = 0.$$

对函数 $F(x) = \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy$ 利用 2205 题的结果, 即可得 $\int_a^b [f(a) - f(y)]^2 dy = 0$. 再次对函数 $G(y) = [f(a) - f(y)]^2$ 利用 2205 题的结果, 即得 $f(x) = \text{常数}$.

证 因为

$$0 \leq \int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy = (b-a) \int_a^b f^2(x) dx - 2 \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 + (b-a) \int_a^b f^2(y) dy,$$

$$\text{故有} \quad \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

当 $f(x) = \text{常数}$ 时, 显然上式中 等号成立. 反之, 设上式中 等号成立, 则有

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy = 0.$$

由于函数 $F(x) = \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy$ 是 $a \leq x \leq b$ 上的非负连续函数, 故 $F(x) \equiv 0$ ($a \leq x \leq b$). 特别 $F(a) = 0$, 即 $\int_a^b [f(a) - f(y)]^2 dy = 0$. 又由于函数 $G(y) = [f(a) - f(y)]^2$ 是 $a \leq y \leq b$ 上的非负连续函数, 故 $G(y) \equiv 0$ ($a \leq y \leq b$). 因此, $f(y) = f(a)$ ($a \leq y \leq b$), 即 $f(x) = \text{常数}$. 证毕.

【3912】 下列积分有怎样的符号?

$$(1) \quad \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln(x^2+y^2) dx dy; \quad (2) \quad \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy; \quad (3) \quad \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy?$$

解 (1) 由于 $0 < x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2 \leq 1$ 及 $\ln(x^2 + y^2) \leq \ln 1 = 0$, 且当 $|x| + |y| < 1$ 时 $\ln(x^2 + y^2) < 0$,

故

$$\iint_{|x|+|y|<1} \ln(x^2+y^2) dx dy < 0.$$

(2) 我们有 $\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy = I_1 - I_2 - I_3$, 其中

$$I_1 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy, \quad I_2 = \iint_{1 < x^2+y^2 \leq 2} \sqrt[3]{x^2+y^2-1} dx dy, \quad I_3 = \iint_{2 < x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{x^2+y^2-1} dx dy.$$

显然

$$0 < I_1 < \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = \pi, \quad I_2 > 0, \quad I_3 > \iint_{2 < x^2+y^2 \leq 4} dx dy = 4\pi - 2\pi = 2\pi,$$

故

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy < 0.$$

(3) 我们有

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 1}} \arcsin(x+y) dx dy = \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 1}} \arcsin(x+y) dx dy + \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} \arcsin(x+y) dx dy.$$

上式右端第一个积分由对称性知其值为零, 第二个积分因被积函数在积分域上为非负不恒为零的连续函数, 因而, 积分值是正的. 于是, 原积分是正的.

【3913】 求函数 $f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$ 在正方形: $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ 内的平均值.

提示 所求平均值为积分 $\frac{1}{\pi^2} \iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} f(x, y) dx dy$.

解 平均值 $I_0 = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} \sin^2 x \sin^2 y dx dy = \frac{1}{\pi^2} \left[\int_0^\pi \sin^2 x dx \right]^2 = \frac{1}{\pi^2} \left[\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi \right]^2 = \frac{1}{4}.$

【3914】 利用中值定理估计积分 $I = \iint_{x^2+y^2 \leq 10} \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}.$

解题思路 注意到积分域的面积 200, 故由积分中值定理知,

$$I = \frac{200}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta}, \quad \text{其中 } (\xi, \eta) \in \text{区域 } |x| + |y| \leq 10.$$

显然有 $0 \leq \cos^2 \xi + \cos^2 \eta \leq 2$, 可以证明必有 $0 < \cos^2 \xi + \cos^2 \eta < 2$.

于是, 可知 $1.96 < I < 2$.

解 由于积分域的面积 200, 故由积分中值定理知,

$$I = \frac{1}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta} \cdot 200 = \frac{200}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta}, \quad (1)$$

其中 (ξ, η) 为区域 $|x| + |y| \leq 10$ 中的某点.

显然 $0 \leq \cos^2 \xi + \cos^2 \eta \leq 2$, 我们证明必有

$$0 < \cos^2 \xi + \cos^2 \eta < 2. \quad (2)$$

由于函数 $\cos^2 x + \cos^2 y$ 在有界闭区域 $|x| + |y| \leq 10$ 上的最大值为 2, 最小值为 0. 从而, 连续函数

$\frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ 在有界闭区域 $|x| + |y| \leq 10$ 上的最小值为 $\frac{1}{102}$, 最大值为 $\frac{1}{100}$. 如果 $\cos^2 \xi + \cos^2 \eta = 2$, 则

由(1)式知,

$$\iint_{|x|+|y| \leq 10} \left(\frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} - \frac{1}{102} \right) dx dy = I - I = 0.$$

但 $f(x, y) = \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} - \frac{1}{102}$ 是非负连续函数, 从而, 必有 $f(x, y) \equiv 0$ (在区域 $|x| + |y| \leq 10$ 上),

即 $\cos^2 x + \cos^2 y = 2$ (在区域 $|x| + |y| \leq 10$ 上). 这显然是错误的. 由此可知, $\cos^2 \xi + \cos^2 \eta < 2$. 同理可证

$\cos^2 \xi + \cos^2 \eta > 0$. 于是, (2)式成立. 从而, 得 $\frac{200}{102} < I < \frac{200}{100}$, 即 $1.96 < I < 2$.

【3915】 求圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$ 上的点到原点的距离之平方的平均值.

解题思路 平均值 $I_0 = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} (x^2 + y^2) dx dy$. 可以求得

$$\frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} y^2 dx dy = b^2 + \frac{R^2}{4}, \quad \frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} x^2 dx dy = a^2 + \frac{R^2}{4}.$$

从而, $I_0 = a^2 + b^2 + \frac{R^2}{2}$.

解 平均值 $I_0 = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} (x^2 + y^2) dx dy$. 由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} y^2 dx dy &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{a-R}^{a+R} dx \int_{b-\sqrt{R^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}} y^2 dy \\ &= \frac{1}{3\pi R^2} \left\{ 6b^2 \int_{a-R}^{a+R} \sqrt{R^2-(x-a)^2} dx + 2 \int_{a-R}^{a+R} [R^2 - (x-a)^2]^{\frac{3}{2}} dx \right\} \\ &= \frac{2b^2}{\pi R^2} \left[\frac{x-a}{2} \sqrt{R^2-(x-a)^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x-a}{R} \right] \Big|_{a-R}^{a+R} + \frac{2}{3\pi R^2} \left\{ \frac{x-a}{8} [5R^2 - 2(x-a)^2] \sqrt{R^2-(x-a)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3R^4}{8} \arcsin \frac{x-a}{R} \right\} \Big|_{a-R}^{a+R} \\ &= \frac{2b^2}{\pi R^2} \cdot \frac{\pi R^2}{2} + \frac{1}{3\pi R^2} \cdot \frac{3\pi R^4}{8} = b^2 + \frac{R^2}{4}. \end{aligned}$$

同理, 有

$$\frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} x^2 dx dy = a^2 + \frac{R^2}{4}.$$

于是, $I_0 = a^2 + b^2 + \frac{R^2}{2}$.

在问题 3916~3922 中, 对二重积分 $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ 内按所给区域 Ω 依两个不同的顺序安置积分的上下限.

【3916】 Ω 以 $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$ 为顶点的三角形.

解 为方便起见, 将二重积分 $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ 记作 I . 于是,

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx.$$

【3917】 Ω 以 $O(0,0), A(2,1), B(-2,1)$ 为顶点的三角形.

提示 注意直线 OA 的方程为 $y = \frac{1}{2}x$, OB 的方程为 $y = -\frac{1}{2}x$ 及 AB 的方程为 $y = 1$.

解 如图 8.1 所示, OA 的方程为 $y = \frac{1}{2}x$, OB 的方程为 $y = -\frac{1}{2}x$.

AB 的方程为 $y = 1$. 于是,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx \\ &= \int_{-2}^2 dx \int_{\frac{1}{2}|x|}^1 f(x, y) dy + \int_{-2}^2 dx \int_{\frac{1}{2}|x|}^1 f(x, y) dy \\ &\quad \int_{-2}^2 dx \int_{\frac{1}{2}|x|}^1 f(x, y) dy. \end{aligned}$$

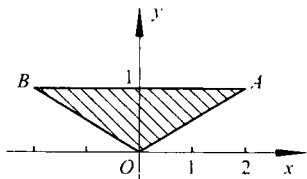


图 8.1

【3918】 Ω 以 $O(0,0), A(1,0), B(1,2), C(0,1)$ 为顶点的梯形.

解 如图 8.2 所示, BC 的方程为 $y - 1 = x$. 于是,

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx.$$

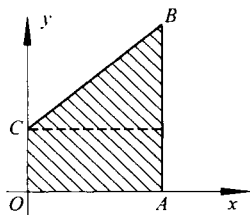


图 8.2

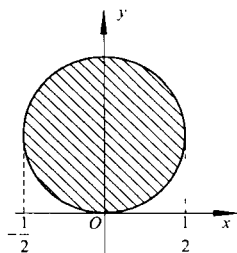


图 8.3

【3919】 Ω —圆 $x^2 + y^2 \leq 1$.

解
$$I = \int_1^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy = \int_1^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx.$$

【3920】 Ω —圆 $x^2 + y^2 \leq y$.

提示 积分域 Ω 为 $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq (\frac{1}{2})^2$.

解 如图 8.3 所示. 积分域 Ω 为 $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq (\frac{1}{2})^2$, 其围线为

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2.$$

于是,

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y) dy = \int_1^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y) dx.$$

【3921】 Ω —被曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所包围的区域.

解 曲线 $y=x^2$ 及 $y=1$ 的交点为 $(-1, 1), (1, 1)$. 于是,

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx.$$

【3922】 Ω —圆环 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

解 如图 8.4 所示. 若先对 y 后对 x 积分, 则

$$\begin{aligned} I = & \int_{-2}^{-1} dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy + \int_1^1 dx \left\{ \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy \right. \\ & \left. + \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy \right\} + \int_1^2 dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy. \end{aligned}$$

若先对 x 后对 y 积分, 则

$$\begin{aligned} I = & \int_2^1 dy \int_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \int_1^1 dy \left\{ \int_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx \right. \\ & \left. + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx \right\} + \int_1^2 dy \int_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx. \end{aligned}$$

【3923】 证明狄利克雷公式:

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x,y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x,y) dx \quad (a > 0).$$

证明思路 注意公式左端的逐次积分, 等于积分

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy,$$

其中 Ω 为三角形域 OAB ; $O(0,0), A(a,0), B(a,a)$, 改变积分的顺序, 公式即可获证.

证 公式左端的逐次积分, 等于积分 $\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy$, 其中 Ω 为三角形域 OAB (图 8.5); $O(0,0), A(a,0)$.

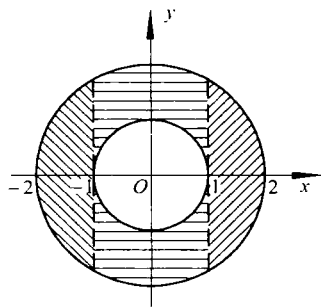


图 8.4

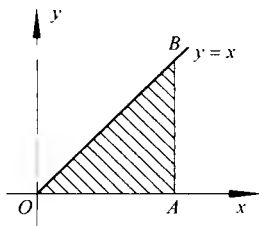


图 8.5

$B(a, a)$. 对于该积分, 若化为先对 x 后对 y 的逐次积分, 即为公式的右端. 于是, 本题获证.

在下列积分中改变积分的顺序:

【3924】 $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy.$

提示 注意积分域的围线为 $y=x$, $y=2x$ 及 $x=2$. 它是一个三角形域, 其顶点为 $(0, 0)$, $(2, 2)$ 及 $(2, 4)$.

解 积分域的围线为: $y=x$, $y=2x$ 及 $x=2$, 如图 8.6 所示. 改变积分的顺序, 即得

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{1}} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx.$$

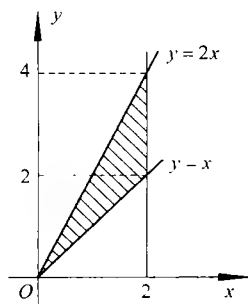


图 8.6

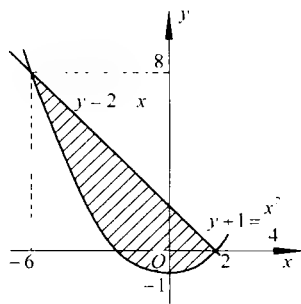


图 8.7

【3925】 $\int_6^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{2-x} f(x, y) dy.$

提示 注意积分域的围线为 $y=2-x$ 及 $y+1=\frac{x^2}{4}$, 其交点为 $(2, 0)$ 及 $(-6, 8)$.

解 积分域的围线为: $y=2-x$ 及 $y+1=\frac{x^2}{4}$, 其交点为 $(2, 0)$, $(-6, 8)$, 如图 8.7 所示. 改变积分的顺序, 即得

$$\int_6^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{2-x} f(x, y) dy = \int_{-6}^2 dy \int_{2\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{1-y}}^2 f(x, y) dx.$$

【3926】 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x^3} f(x, y) dy.$

提示 注意积分域的围线为 $y=x^2$ 及 $y=x^3$, 其交点为 $(0, 0)$ 及 $(1, 1)$.

解 积分域的围线为: $y=x^2$ 及 $y=x^3$, 其交点为 $(0, 0)$, $(1, 1)$, 如图 8.8 所示. 改变积分的顺序, 即得

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x^3} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx.$$

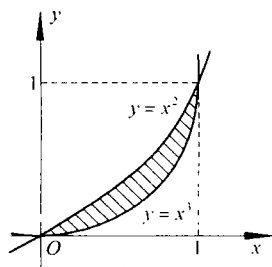


图 8.8

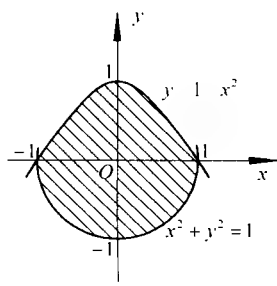


图 8.9

【3927】 $\int_1^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 f(x, y) dy.$

提示 注意积分域的围线为圆 $x^2+y^2=1$ 的下半部分及抛物线 $y=1-x^2$, 其交点为 $(-1, 0)$ 及 $(1, 0)$.

解 积分域的围线为圆 $x^2+y^2=1$ 的下半部分及抛物线 $y=1-x^2$, 如图 8.9 所示. 改变积分的顺序, 即得

$$\int_1^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

【3928】 $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy.$

提示 注意积分域的围线为圆 $x^2 + y^2 = 2x$ 或 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = 2 - x$, 其交点为 $(2,0)$ 及 $(1,1)$.

解 积分域的围线为圆 $x^2 + y^2 = 2x$ 或 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = 2 - x$, 其交点为 $(2,0)$, $(1,1)$, 如图 8.10 中阴影部分所示. 改变积分的顺序, 即得

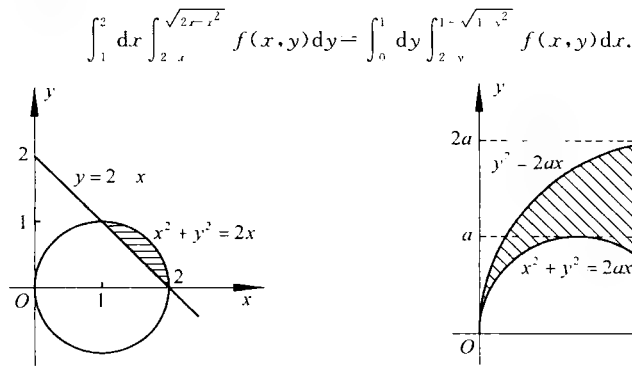


图 8.10

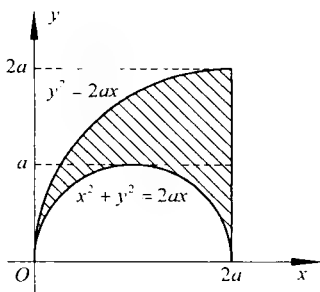


图 8.11

【3929】 $\int_{1/a}^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y) dy \quad (a > 0).$

提示 注意积分域的围线由圆 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ ($y \geq 0$), 抛物线 $y^2 = 2ax$ ($y \geq 0$) 及直线 $x = 2a$ 组成, 其交点为 $(0,0)$ 及 $(2a,0)$.

解 积分域由围线 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ ($y \geq 0$), $y^2 = 2ax$ ($y \geq 0$) 及 $x = 2a$ 组成. 如图 8.11 中阴影部分所示. 改变积分的顺序, 即得

$$\int_{1/a}^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y) dy = \int_0^a dy \left\{ \int_{\frac{y^2}{2a}}^{\sqrt{a^2 - \frac{y^2}{2}}} f(x,y) dx + \int_{\sqrt{a^2 - \frac{y^2}{2}}}^{2a} f(x,y) dx \right\} + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y) dx.$$

【3930】 $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y) dy.$

解 积分域如图 8.12 中阴影部分所示. 改变积分的顺序, 即得

$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y) dx.$$

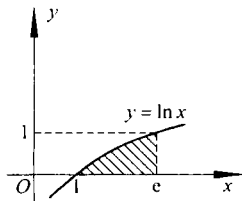


图 8.12

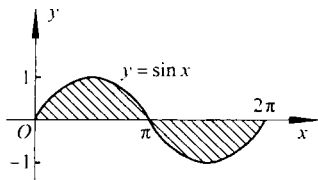


图 8.13

【3931】 $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y) dy.$

解 积分域如图 8.13 中阴影部分所示. 由于 $y = \sin x$ 的反函数, 当 y 从 0 变到 1 时为 $x = \arcsin y$, 当 y 从 1 变到 -1 时 $x = \pi - \arcsin y$, 当 y 从 -1 变到 0 时为 $x = 2\pi - \arcsin y$, 故改变积分的顺序, 即得

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{2\pi - \arcsin y}^{2\pi} f(x,y) dx.$$

计算下列积分:

【3932】 $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy$, 设 Ω 是被抛物线 $y^2 = 2px$ 和直线 $x = \frac{p}{2}$ ($p > 0$) 所包围的区域.

解 积分域如图 8.14 所示. 于是,

$$\iint_{\Omega} xy^2 dx dy = \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2 dy = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{2}{3} x \sqrt{(2px)^3} dx = \frac{p^5}{21}.$$

【3933】 $\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}}$ ($a > 0$), 其中 Ω 是以圆心在点 (a, a) 半径为 a 的圆周 (它与坐标轴相切) 的较短弧和坐标轴为界的区域.

提示 注意积分域 Ω 的围线为圆 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ 与两坐标轴相切的较短弧及直线 $x=0, y=0$,

因而, 当 x 从 0 变到 a 时, 对于每一个固定的 x, y 从 0 变到 $a - \sqrt{2ax-x^2}$.

解 如图 8.15 所示. 当 x 从 0 变到 a 时, 对于每一固定的 x, y 从 0 变到 $a - \sqrt{2ax-x^2}$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}} &= \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2a-x}} \int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} dy \\ &= \int_0^a \frac{a dx}{\sqrt{2a-x}} - \int_0^a \sqrt{x} dx = \left(2\sqrt{2} - \frac{8}{3}\right) a \sqrt{a}. \end{aligned}$$

【3934】 $\iint_{\Omega} |xy| dx dy$, 其中 Ω 是以 a 为半径, 坐标原点为圆心的圆.

提示 原式 $= \int_{-a}^a |x| dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} |y| dy$. 并注意被积函数均为偶函数及积分区间的对称性.

$$\iint_{\Omega} |xy| dx dy = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} |xy| dy = \int_{-a}^a (a^2-x^2) |x| dx = 2 \int_0^a (a^2-x^2) x dx = \frac{a^4}{2}.$$

【3935】 $\iint_{\Omega} (x^2+y^2) dx dy$, 其中 Ω 是以 $y=x, y=x+a, y=a$ 和 $y=3a$ ($a > 0$) 为边的平行四边形.

提示 宜选择先对 x 后对 y 积分较好.

解 如图 8.16 所示. 当 y 从 a 变到 $3a$ 时, 对于每一固定的 y, x 从 $y-a$ 变到 y . 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (x^2+y^2) dx dy &= \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2+y^2) dx \\ &= \int_a^{3a} \left[\frac{y^3}{3} + ay^2 - \frac{(y-a)^3}{3} \right] dy = \frac{168a^4}{12} = 14a^4. \end{aligned}$$

【3936】 $\iint_{\Omega} y^2 dx dy$, 其中 Ω 是被横轴和摆线

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的第一拱所包围的区域.

提示 利用 2281 题及 2282 题的结果.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} y^2 dx dy &= \int_0^{2\pi} dx \int_0^y y^2 dx - \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^4 dt - \frac{2^4 a^4}{3} \int_0^{2\pi} \sin^8 \frac{t}{2} dt = \frac{2^5 a^4}{3} \int_0^{\pi} \sin^8 u du \\ &= \frac{2^5 a^4}{3} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^8 u du \right\} = \frac{2^5 a^4}{3} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 u du \right\} - \frac{2^5 a^4}{3} \cdot 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^8 u du \\ &= \frac{2^5 a^4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35}{12} \pi a^4. \end{aligned}$$

*) 利用 2282 题的结果.

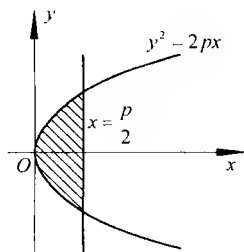


图 8.14

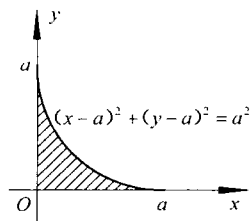


图 8.15

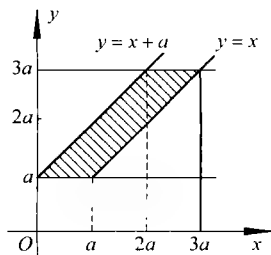


图 8.16

* *) 利用 2281 题的结果.

在二重积分

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

中, 令 $x = r \cos \varphi$ 和 $y = r \sin \varphi$, 变换为极坐标 r 和 φ , 并配置积分的限, 设:

【3937】 Ω —圆 $x^2 + y^2 \leq a^2$.

解 雅可比行列式 $I = r$, 以下各题不再写出. φ 从 0 变到 2π , r 从 0 变到 a . 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

【3938】 Ω —圆 $x^2 + y^2 \leq ax$ ($a > 0$).

解 圆 $x^2 + y^2 \leq ax$ 即 $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \leq (\frac{a}{2})^2$, 其围线的极坐标方程为 $r = a \cos \varphi$. 当 φ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 0 变到 $a \cos \varphi$. 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

【3939】 Ω —环 $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$.

提示 注意当 φ 从 0 变到 2π 时, r 从 $|a|$ 变到 $|b|$.

解 φ 从 0 变到 2π , r 从 $|a|$ 变到 $|b|$. 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

【3940】 Ω —三角形 $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x$.

提示 注意直线 $x + y = 1$ 的极坐标方程为 $r = \frac{1}{\sqrt{2}} \csc(\varphi + \frac{\pi}{2})$ 及 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$.

解 由于直线 $x + y = 1$ 的极坐标方程为

$$r = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \csc(\varphi + \frac{\pi}{4}),$$

因而当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 0 变到 $\frac{1}{\sqrt{2}} \csc(\varphi + \frac{\pi}{4})$. 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}} \csc(\varphi + \frac{\pi}{4})} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

【3941】 Ω —区域 $a \leq x \leq a; \frac{x^2}{a} \leq y \leq a$.

解题思路 注意抛物线 $y = \frac{x^2}{a}$ 及直线 $y = a$ 的极坐标方程分别为 $r = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$ 及 $r = \frac{a}{\sin \varphi}$. 又 φ 的积分范围

$[0, \pi]$ 应分为 $[0, \frac{\pi}{4}]$, $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ 及 $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$.

解 如图 8.17 所示. 区域 Ω 可分为三部分:

(1) 当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 0 变到 $\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$, 其中 $r = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$ 为抛物线 $y = \frac{x^2}{a}$ 的极坐标方程;

(2) 当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{3\pi}{4}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 0 变到 $\frac{a}{\sin \varphi}$;

(3) 当 φ 从 $\frac{3\pi}{4}$ 变到 π 时, 对于每一固定的 φ , r 从 0 变到 $\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$.

于是,

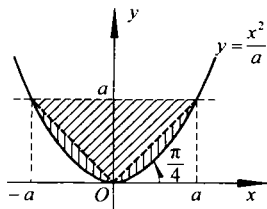


图 8.17

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sin \varphi}}^{\frac{1}{\cos \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \\ + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

【3942】 在怎样的情况下,当变换为极坐标之后,积分的上下限是常数?

提示 当且仅当积分域为由中心在原点的两同心圆和由原点引出的两条射线所围成.

解 若变换为极坐标,积分 $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b d\varphi \int_a^b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$,

其中 α, β, a, b 均为常数,则表明积分域 Ω 为 $a \leq r \leq b, \alpha \leq \varphi \leq \beta$. 它表示圆环面 $a \leq r \leq b$ 被射线 $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ 截出的部分,且只有积分域是这种情况,变换为极坐标后积分的上下限才是常数. 如 3937 题及 3939 题即为其特例.

在下列积分中,令 $x = r \cos \varphi$ 和 $y = r \sin \varphi$,变换为极坐标 r 和 φ ,并依两种不同的顺序配置积分的上下限:

【3943】 $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$

解 如图 8.18 所示. 若先对 r 积分,则当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时,对于每一固定的 φ, r 从 0 变到 $\sec \varphi$; 当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时,对于每一固定的 φ, r 从 0 变到 $\csc \varphi$.

若先对 φ 积分,则当 r 从 0 变到 1 时, φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$; 当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时,对于每一固定的 r, φ 从 $\arccos \frac{1}{r}$ 变到 $\arcsin \frac{1}{r}$. 于是,

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy \\ = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sec \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\csc \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \\ = \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{1}{r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

下面的 3944 题~3950 题均可仿本题的思路来求解.

【3944】 $\int_0^1 dx \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

解 如图 8.19 所示. 若先对 r 积分,则当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时,对于每一固定的 φ, r 从 $\frac{1}{\sqrt{2}} \csc(\varphi + \frac{\pi}{4})$ 变到 1. 若先对 φ 积分,则当 r 从 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 变到 1 时,对于每一固定的 r, φ 从 $\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}$ 变到 $\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}$, 其中直线 $x + y = 1$ 的极坐标方程为 $r \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 即 $\cos(\frac{\pi}{4} - \varphi) = \frac{1}{r\sqrt{2}}$ 或 $\frac{\pi}{4} - \varphi = \pm \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}$. 于是,

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}} \csc(\varphi + \frac{\pi}{4})}^1 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r dr \int_{\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

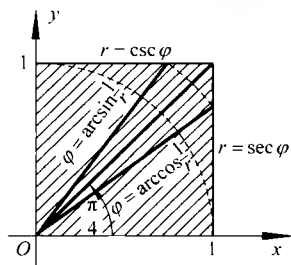


图 8.18

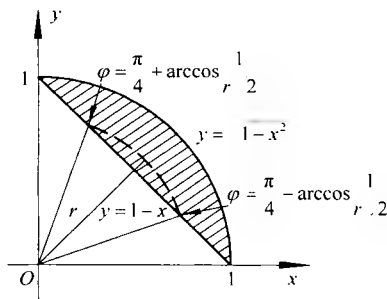


图 8.19

【3945】 $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(\sqrt{x^2+y^2}) dy.$

解 如图 8.20 所示. 若先对 r 积分, 则当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 0 变到 $\frac{2}{\cos\varphi}$.

若先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 $2\sqrt{2}$ 时, φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$; 当 r 从 $2\sqrt{2}$ 变到 4 时, 对于每一固定的 r , φ 从 $\arccos \frac{2}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$. 于是,

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(\sqrt{x^2+y^2}) dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} r f(r) dr \\ &= \frac{\pi}{12} \int_0^{2\sqrt{2}} r f(r) dr + \int_{2\sqrt{2}}^4 \left(\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{2}{r} \right) r f(r) dr. \end{aligned}$$

【3946】 $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$

解 如图 8.21 所示. 若先对 r 积分, 则当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 $\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 变到 $\frac{1}{\cos\varphi}$, 其中 $r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 为抛物线 $y = x^2$ 的极坐标方程.

若先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 1 时, 对于每一固定的 r , φ 从 0 变到 $\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$ (由 $r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 解出 φ); 当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时, 对于每一固定的 r , φ 从 $\arccos \frac{1}{r}$ 变到 $\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$. 于是,

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi \\ &\quad + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

【3947】 $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$, 其中区域 Ω 由曲线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($x \geq 0$) 围成.

解 令 $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, 则曲线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($x \geq 0$) 的极坐标方程为 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, 其图像是双纽线的右半部分, 如图 8.22 所示.

若先对 r 积分, 则当 φ 从 $-\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 0 变到 $a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

若先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 a 时, 对于每一固定的 r , φ 从 $\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}$ 变到 $\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \int_0^a r dr \int_{\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr. \end{aligned}$$

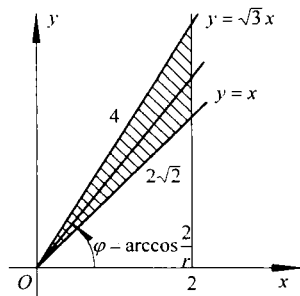


图 8.20

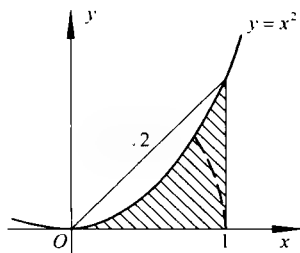


图 8.21

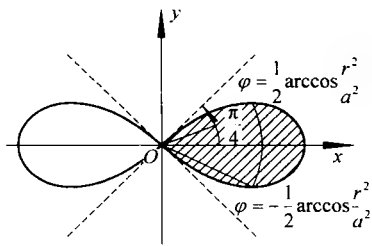


图 8.22

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致, 以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

令 r 和 φ 为极坐标, 在下列积分中变更积分的顺序:

【3948】 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(\varphi, r) dr \quad (x \geq 0).$

解 积分域为由圆 $r = a \cos \varphi$ 或 $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$ 所围成的圆域.

若先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 a 时, 对于每一固定的 r , φ 从 $-\arccos \frac{r}{a}$ 变到 $\arccos \frac{r}{a}$ (图 8.23). 于是,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(\varphi, r) dr = \int_0^a dr \int_{-\arccos \frac{r}{a}}^{\arccos \frac{r}{a}} f(\varphi, r) d\varphi.$$

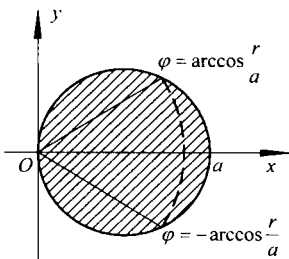


图 8.23

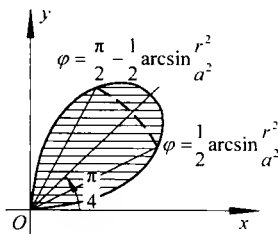


图 8.24

【3949】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0).$

解 积分域由双纽线 $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ 的右上部分围成 (图 8.24).

若先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 a 时, 对于每一固定的 r , φ 从 $\frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}$ 变到 $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}$. 于是,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r) dr = \int_0^a dr \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r) d\varphi.$$

【3950】 $\int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi, r) dr. \quad (0 < a < 2\pi).$

解 积分域由曲线 $r = \varphi$ (阿基米德螺线) 与射线 $\varphi = a$ 围成 (图 8.25).

改变积分顺序, 即得

$$\int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi, r) dr = \int_0^a dr \int_r^a f(\varphi, r) d\varphi.$$

变换成极坐标, 把二重积分化为一重积分:

【3951】 $\iint_{r^2 + y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy.$

提示 注意先对 r 再对 φ 积分, 即易获解.

解 $\iint_{r^2 + y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 f(r) r dr = 2\pi \int_0^1 r f(r) dr.$

【3952】 $\iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$, 其中 $\Omega = \{ |y| \leq |x|; |x| \leq 1 \}.$

解题思路 注意先对 φ 后对 r 积分, 当 r 从 0 变到 1 时, 对于每一个固定的 r , φ 从 $-\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$; 当 r 从

1 变到 $\sqrt{2}$ 时, 对于每一个固定的 r , φ 从 $\arccos \frac{1}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$.

注意到积分域 Ω 关于 x 轴及 y 轴的对称性, 故当 φ 从 $-\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时, 应在所得的积分表达式前面乘以

常数 2, 而当 φ 从 $\arccos \frac{1}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时, 则应在所得的积分表达式前面乘以常数 4. 这一点务请读者注意, 否

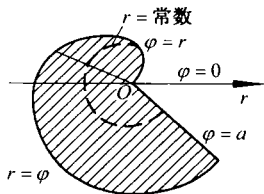


图 8.25

则就会产生错误.

解 积分域 Ω 如图 8.26 所示. 先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 1 时, φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$; 当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时, 对于每一固定的 r , φ 从 $\arccos \frac{1}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$. 于是,

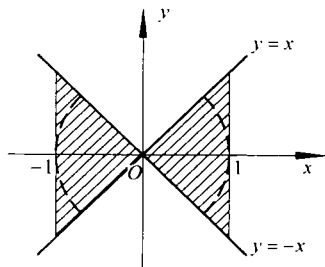


图 8.26

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy \\ &= 2 \int_0^1 r f(r) dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + 4 \int_1^{\sqrt{2}} r f(r) dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \\ &= \pi \int_0^1 r f(r) dr + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\pi - 4 \arccos \frac{1}{r} \right) r f(r) dr. \end{aligned}$$

【3953】 $\iint_{r^2, \sqrt{x^2+y^2}, r} f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy.$

提示 注意先对 r 再对 φ 积分, 当 r 从 0 变到 $\cos \varphi$ 时, 对于每一个固定的 φ , φ 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$, 问题即可获解.

解 $\iint_{r^2, \sqrt{x^2+y^2}, r} f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} f(\tan \varphi) r dr = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\tan \varphi) \cos^2 \varphi d\varphi.$

变换成极坐标, 计算下列二重积分:

【3954】 $\iint_{r^2, \sqrt{x^2+y^2}, u^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy.$

提示 注意积分域 Ω 为 $\{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a\}$.

解 $\iint_{r^2, \sqrt{x^2+y^2}, u^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \cdot r dr = \frac{2\pi a^3}{3}.$

【3955】 $\iint_{\pi^2, r^2, y^2, 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy.$

提示 注意积分域 Ω 为 $\{0 \leq \varphi \leq 2\pi, \pi \leq r \leq 2\pi\}$.

解 $\iint_{\pi^2, r^2, y^2, 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi}^{2\pi} r \sin r dr = 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} r \sin r dr = -6\pi^2.$

【3956】 利用函数组

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \sqrt{xy}$$

把正方形 $S: \{a < x < a+h, b < y < b+h\} (a>0, b>0)$ 变换为区域 S' . 求区域 S' 的面积与区域 S 的面积之比.

当 $h \rightarrow 0$ 时, 此比值的极限等于什么?

解 正方形的角点 $A(a, b), B(a+h, b), C(a+h, b+h), D(a, b+h)$ 对应于 Ouv 平面上的点

$$\begin{aligned} A' & \left(\frac{b^2}{a}, \sqrt{ab} \right), & B' & \left(\frac{b^2}{(a+h)^2}, \sqrt{(a+h)b} \right), \\ C' & \left(\frac{(b+h)^2}{a+h}, \sqrt{(a+h)(b+h)} \right), & D' & \left(\frac{(b+h)^2}{a}, \sqrt{a(b+h)} \right). \end{aligned}$$

正方形的四边 $y=b, x=a+h, y=b+h, x=a$ 对应于 Ouv 平面上的四条曲线, 即

$$A'B': u = \frac{b^3}{v^2}; \quad B'C': u = \frac{v^3}{(a+h)^2}; \quad C'D': u = \frac{(b+h)^3}{v^2}; \quad D'A': u = \frac{v^3}{a^2}.$$

由这四条曲线围成的区域即为 S' (图 8.27).

于是, 区域 S' 的面积为

$$\begin{aligned}
S' &= \iint_S du dv = \int_{\sqrt{ab}}^{\sqrt{a(b+h)}} \frac{v^3}{a^3} dv + \int_{\sqrt{a(b+h)}}^{\sqrt{(a+h)(b+h)}} \frac{(b+h)^3}{v^3} dv - \int_{\sqrt{ab}}^{\sqrt{(a+h)b}} \frac{b^3}{v^3} dv \\
&= \int_{\sqrt{a(b+h)}}^{\sqrt{(a+h)(b+h)}} \frac{v^3}{(a+h)^3} dv = \frac{1}{5a^3} [\sqrt{a^3(b+h)^5} - \sqrt{a^3 b^5}] \\
&\quad + (b+h)^3 \left[\frac{1}{\sqrt{a(b+h)}} - \frac{1}{\sqrt{(a+h)(b+h)}} \right] - b^3 \left[\frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{(a+h)b}} \right] \\
&\quad - \frac{1}{5(a+h)^3} [\sqrt{(a+h)^3(b+h)^5} - \sqrt{(a+h)^3 b^5}] \\
&\quad - \frac{6}{5} [\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}] \left[\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}} \right].
\end{aligned}$$

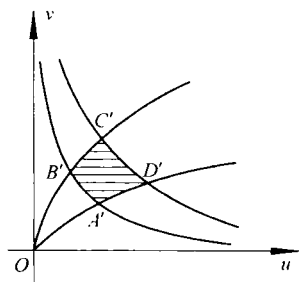


图 8.27

从而, 区域 S' 的面积与区域 S 的面积之比为

$$\begin{aligned}
\frac{S'}{S} &= \frac{6}{5h^2} [\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}] \left[\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}} \right] = \frac{6}{5} \cdot \frac{[\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}](\sqrt{a+h} - \sqrt{a})}{h^2 \sqrt{a(a+h)}} \\
&= \frac{6}{5} \cdot \frac{\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})(\sqrt{b+h} + \sqrt{b})(\sqrt{b+h} - \sqrt{b})} \\
&= \frac{6}{5} \cdot \frac{b^2 + b(b+h) + (b+h)^2 + (2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})(\sqrt{b+h} + \sqrt{b})}.
\end{aligned}$$

上述比式是 h 的函数, 并且在 $h \rightarrow 0$ 点连续. 于是,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S'}{S} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5b^2}{4\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{b}} = \frac{3}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

事实上, 应用洛必达法则求此极限更简单些, 这是因为

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{2} \sqrt{(b+h)^3} = \frac{5}{2} b^{\frac{3}{2}}, \\
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} (a+h)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

于是,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S'}{S} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{2} b^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

注意 若利用二重积分的变量代换, 则计算 S' 较为简单, 容易算得

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = -\frac{3}{2} \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{4}{2}},$$

$$\text{故 } S' = \iint_{S'} du dv = \iint_S \left| \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \right| dx dy = \frac{3}{2} \int_a^{a+h} x^{-\frac{1}{2}} dx \int_b^{b+h} y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}} \right) (\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5})$$

与上述结果一致. 但是, 从原习题集的安排来看, 似乎应从 3965 题以后才开始用一般的变量代换来计算二重积分.

引入新的变量 u, v 来代替 x, y 并确定下列二重积分中的积分限:

【3957】 $\int_a^b dx \int_{ax}^{\beta x} f(x, y) dy \quad (0 < a < b; 0 < \alpha < \beta),$ 令

$$u = x, \quad v = \frac{y}{x}.$$

提示 注意在所给变换 $u = x, v = \frac{y}{x}$ 下, 积分域由 $a \leq x \leq b, ax \leq y \leq \beta x$ 变为 $a \leq u \leq b, \alpha \leq v \leq \beta$, 且变换的雅可比行列式

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = -u > 0.$$

解 在变换 $u=x, v=\frac{y}{x}$ 下, 区域 $\Omega=\{a \leq x \leq b, \alpha x \leq y \leq \beta x\}$ 变为 $\Omega'=\{a \leq u \leq b, \alpha \leq v \leq \beta\}$. 变换的雅可比行列式

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u > 0.$$

于是

$$\int_a^b dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy = \int_a^b u du \int_{\alpha}^{\beta} f(u, uv) dv.$$

【3958】 $\int_0^2 dx \int_{1-x}^x f(x, y) dy$, 令 $u=x+y, v=x-y$.

提示 在变换 $u=x+y, v=x-y$ 下, 积分域由 $0 \leq x \leq 2, 1-x \leq y \leq 2-x$ 变为 $1 \leq u \leq 2, -u \leq v \leq 4-u$, 且变换的雅可比行列式 $I = -\frac{1}{2}, x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$.

解 在变换 $u=x+y, v=x-y$ 下, 区域 $\Omega = \{0 \leq x \leq 2, 1-x \leq y \leq 2-x\}$ 变为 $\Omega' = \{1 \leq u \leq 2, -u \leq v \leq 4-u\}$. 事实上, $u+v=2x, u-v=2y$, 故 $0 \leq u+v \leq 4$, 即 $-u \leq v \leq 4-u$. 变换的雅可比行列式 $I = -\frac{1}{2}$, 从而, $|I| = \frac{1}{2}$, 且 $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$. 于是,

$$\int_0^2 dx \int_{1-x}^x f(x, y) dy = \frac{1}{2} \int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv.$$

【3959】 $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$, 其中 Ω 是被曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x \geq 0, y \geq 0 (a > 0)$ 所包围的区域, 令

$$x = u \cos^4 v, \quad y = u \sin^4 v.$$

提示 注意 Ω 的界线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 的参数方程为

$$x = a \cos^4 v, \quad y = a \sin^4 v \quad (0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}).$$

对于所给变换, 有 $|I| = 4|u \cos^3 v \cdot \sin^3 v|$, 且积分域 Ω 变为 $\Omega' = \{0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$.

解 Ω 的界线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 的参数方程为

$$x = a \cos^4 v, \quad y = a \sin^4 v \quad (0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}).$$

对于变换 $x = u \cos^4 v, y = u \sin^4 v$, 有 $|I| = 4|u \cos^3 v \sin^3 v|$, 且区域 Ω 变为 $\Omega' = \{0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &= 4 \int_0^a u du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v \sin^3 v f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) dv \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v \sin^3 v dv \int_0^a u f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) du. \end{aligned}$$

【3960】 证明: 变量代换 $x+y=\xi, y=\xi\eta$ 把三角形 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$ 变为单位正方形 $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$.

证 由 $0 \leq y \leq 1-x$ 及 $0 \leq x \leq 1$ 得 $0 \leq x+y \leq 1$, 即 $0 \leq \xi \leq 1$. 又 $\eta = \frac{y}{x} \leq \frac{y}{0+y} = 1$, 且 $\eta \geq 0$, 故 $0 \leq \eta \leq 1$.

反之, 从 $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$, 得 $0 \leq x+y \leq 1, y = \xi\eta, x = \xi(1-\eta)$, 故 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$. 因此, 三角形域 $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$ 变为正方形域 $\{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$.

【3961】 在怎样的变量代换下, 由曲线 $xy=1, xy=2, x-y+1=0, x-y-1=0 (x>0, y>0)$ 围成的曲线四边形被变换成矩形, 且其边平行于坐标轴?

提示 宜作变换 $xy=u, x-y=v$.

解 原四条曲线为 $xy=1, xy=2, x-y=1, x-y=-1 (x>0, y>0)$, 故显然应作变换 $xy=u, x-y=v$. 这时 u 从 1 变到 2, v 从 -1 变到 1, 故原积分域变为区域: $1 \leq u \leq 2, -1 \leq v \leq 1$.

进行适当的变量代换, 把二重积分化为一重积分:

【3962】
$$\iint_{x+y \leq 1} f(x+y) dx dy.$$

提示 作变换 $x+y=u, x-y=v$ 或 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$, 则有 $|I|=\frac{1}{2}$, 且 u 从 -1 变到 $1, v$ 也从 -1 变到 1 .

解 作变换 $x+y=u, x-y=v$ 或 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$, 则有 $|I|=\frac{1}{2}$, 且 u 从 -1 变到 $1, v$ 从 -1 变到 1 . 于是,

$$\iint_{x+y \leq 1} f(x+y) dx dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^1 f(u) du = \int_{-1}^1 f(u) du.$$

【3963】
$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax+by+c) dx dy \quad (a^2+b^2 \neq 0).$$

提示 作变换 $\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=u, \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=v$, 则有 $x=\frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}, y=\frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $x^2+y^2=u^2+v^2$. 故区域 $x^2+y^2 \leq 1$ 变为 $u^2+v^2 \leq 1$, 且有 $|I|=1$.

解 作变换 $\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=u, \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=v$, 则有 $x=\frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}, y=\frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $x^2+y^2=u^2+v^2 \leq 1$, 故区域 $x^2+y^2 \leq 1$ 变为 $u^2+v^2 \leq 1$, 且有 $|I|=1$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax+by+c) dx dy &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) dudv = \int_{-1}^1 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) dv \\ &= \int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} dv = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) du. \end{aligned}$$

【3964】
$$\iint_{\Omega} f(xy) dx dy$$
 其中区域 Ω 由曲线 $xy=1, xy=2, y=x, y=1 (x>0, y>0)$ 围成.

提示 作变换 $xy=u, \frac{y}{x}=v$, 即 $x=\sqrt{\frac{u}{v}}, y=\sqrt{uv}$. 则区域 Ω 变为区域

$$\Omega' = \{1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}, \quad \text{且 } |I| = \frac{1}{2v}.$$

解 作变换 $xy=u, \frac{y}{x}=v$, 则区域 Ω 变为区域 $\Omega' = \{1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}$, 且 $|I| = \frac{1}{2v}$. 于是,

$$\iint_{\Omega} f(xy) dx dy = \int_1^2 \frac{dv}{2v} \int_1^2 f(u) du = \ln 2 \int_1^2 f(u) du.$$

计算下列二重积分:

【3965】
$$\iint_{\Omega} (x+y) dx dy,$$
 其中区域 Ω 由曲线 $x^2+y^2=x+y$ 围成.

提示 作变换 $x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi, y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$. 则区域 Ω 变为区域

$$\Omega' = \left\{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \quad \text{且 } |I|=r.$$

解 区域 Ω 即圆 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. 作变换: $x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi, y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$. 则区域 Ω 变为区域 $\Omega' = \left\{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, 且 $|I|=r$. 于是,

$$\iint_{\Omega} (x+y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} [r+r(\sin\varphi+\cos\varphi)] dr = \frac{\pi}{2}.$$

【3966】
$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (|x|+|y|) dx dy.$$

提示 注意积分域的对称性.

解
$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (|x|+|y|) dx dy = 4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y) dy = \frac{4}{3}.$$

【3967】
$$\iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, \text{ 其积分域 } \Omega \text{ 是椭圆区域 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

提示 作变换 $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$, 则区域 Ω 变为区域 $\Omega' = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, 且有 $|I| = abr$.

解 作变换 $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$, 则区域 Ω 变为区域 $\Omega' = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, 且 $|I| = abr$. 于是,

$$\iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab \sqrt{1-r^2} r dr = 2\pi ab \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr = \frac{2\pi ab}{3}.$$

【3968】
$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2) dx dy.$$

提示 作变换 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 利用对称性及 1712 题的结果.

解 作变换 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 并利用对称性, 则有

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2) dx dy &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi}} r^4 dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \varphi d \tan \varphi}{1 + \tan^4 \varphi} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4} dt = \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

*) 利用 1712 题的结果.

【3969】
$$\iint_{\Omega} (x+y) dx dy, \text{ 其积分域 } \Omega \text{ 由曲线 } y^2 = 2x, x+y=4, x+y=12 \text{ 围成.}$$

解 由解方程组 $\begin{cases} x+y=4, \\ y^2=2x \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x+y=12, \\ y^2=2x \end{cases}$

求得两条直线与抛物线的交点为 $A(2, 2), B(8, 4), C(18, -6), D(8, -4)$ (图 8.28). 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (x+y) dx dy &= \int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y} (x+y) dx + \int_4^{12} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} (x+y) dx \\ &\quad + \int_{-4}^{-6} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} (x+y) dx = 79 \frac{13}{15} + 384 + 79 \frac{13}{15} \\ &= 543 \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

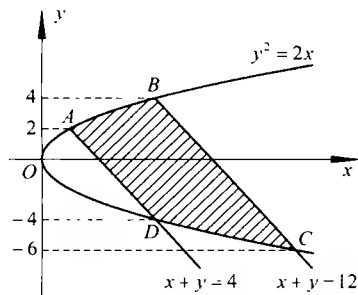


图 8.28

【3970】
$$\iint_{\Omega} xy dx dy, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由曲线 } xy=1, x+y=\frac{5}{2} \text{ 围成}$$

的区域.

解 曲线 $xy=1$ 与直线 $x+y=\frac{5}{2}$ 的交点为 $(\frac{1}{2}, 2), (2, \frac{1}{2})$. 于是,

$$\iint_{\Omega} xy dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 x dx \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} y dy = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{25}{4} x - 5x^2 + x^4 - \frac{1}{x} \right) dx = 1 \frac{37}{128} - \ln 2.$$

【3971】
$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} |\cos(x+y)| dx dy.$$

解
$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} |\cos(x+y)| dx dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi} |\cos(x+y)| dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\pi} |\cos(x+y)| dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_0^{\pi} |\cos(x+y)| dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y) dy - \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi} \cos(x+y) dy \right] dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[-\int_0^{\frac{3\pi}{2}-x} \cos(x+y) dy + \int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi} \cos(x+y) dy \right] dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left\{ \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin x \right) - \left[\sin(x + \pi) - \sin \frac{\pi}{2} \right] \right\} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left\{ - \left(\sin \frac{3\pi}{2} - \sin x \right) + \left[\sin(x + \pi) - \sin \frac{3\pi}{2} \right] \right\} dx \\
= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 dx = 2\pi.$$

【3972】 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy.$

解 积分域如图 8.29 所示, 由 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 和 Ω_4 所组成, 其中 Ω_1 为由圆 $\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 = 0$, 即圆 $\left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 围成的区域, 该圆的极坐标方程为 $r = \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})$, 而圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的极坐标方程为 $r = 1$. 于是, 各区域分别为

$$\Omega_1: -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r \leq \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\Omega_2: \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \leq r \leq 1;$$

$$\Omega_3: \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1;$$

$$\Omega_4: -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \leq r \leq 1.$$

当点在 Ω_1 中时, 由 $\left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$,

即 $\frac{x+y}{\sqrt{2}} - (x^2 + y^2) \geq 0$, 故

$$\left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| = \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 = r \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - r^2;$$

当点在 Ω_2, Ω_3 和 Ω_4 中时,

$$\left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| = x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} = r^2 - r \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right).$$

于是, 注意到利用对称性即得

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_{\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})}^1 \left[r \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - r^2 \right] r dr + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_{\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})}^1 \left[r^2 - r \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \right] r dr \\ &+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 \left[r^2 - r \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \right] r dr \\ &= \frac{1}{6} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^4\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{6} \sin^4\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \right] d\varphi \\ &+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \right] d\varphi \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u du + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u du \right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \frac{\pi}{16} \\ &= \frac{\pi}{32} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{32} \right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \frac{9\pi}{16}. \end{aligned}$$

*) 利用 2281 题的结果.

【3973】 $\iint_{\substack{r \leq 1 \\ 0 < x, y < 2}} \sqrt{|y - x^2|} dx dy.$

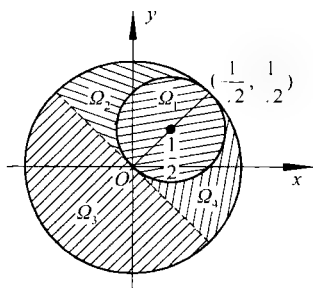


图 8.29

提示 注意 $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ y \leq \sqrt{1-x^2}}} \sqrt{|y-x^2|} dx dy - \iint_{\substack{x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2}} \sqrt{x^2-y} dx dy + \iint_{\substack{x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 2}} \sqrt{y-x^2} dx dy,$

并在积分过程中作代换 $x = \sqrt{2} \sin t$ 及利用 1750 题的结果.

解
$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ y \leq \sqrt{1-x^2}}} \sqrt{|y-x^2|} dx dy - \iint_{\substack{x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2}} \sqrt{x^2-y} dx dy + \iint_{\substack{x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 2}} \sqrt{y-x^2} dx dy \\ &= \int_1^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2-y} dy + \int_1^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y-x^2} dy - \frac{4}{3} \int_0^1 x^3 dx + \frac{4}{3} \int_0^1 (2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{1}{3} + \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta - \frac{1}{3} + \frac{16}{3} \left(\frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

*) 参看 1750 题的结果.

计算不连续函数的积分:

【3974】 $\iint_{x^2-y^2 \leq 1} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) dx dy.$

解题思路 注意: 当 $y^2-x^2 < 2$ 时, $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = 1$; 当 $y^2-x^2 > 2$ 时, $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = -1$; 当 $y^2-x^2 = 2$ 时, $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = 0$.

现将区域 $x^2+y^2 \leq 4$ 分成 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ 及 Ω_5 五个子域, 其中每一个子域的围线为

$\Omega_1: x^2+y^2=4, y^2-x^2=2, y>0; \quad \Omega_2: y^2-x^2=2, x=-1, x=1;$

$\Omega_3: x^2+y^2=4, x=-1; \quad \Omega_4: x^2+y^2=4, x=1;$

$\Omega_5: x^2+y^2=4, y^2-x^2=2, y<0.$

当点在 Ω_1 及 Ω_5 时, $y^2-x^2 > 2$, 故 $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = -1$;

当点在 Ω_2, Ω_3 及 Ω_4 中时, $y^2-x^2 < 2$, 故 $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = 1$.

从而, 问题可获解.

解 当 $y^2-x^2 < 2$ 时, $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = 1$; 当 $y^2-x^2 > 2$ 时, $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = -1$; 当 $y^2-x^2 = 2$ 时, $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = 0$.

现将区域 $x^2+y^2 \leq 4$ 分成 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ 和 Ω_5 五部分, 其界线分别为 $x^2+y^2=1, y^2-x^2=2, x=\pm 1$ (图 8.30). 当点在 Ω_1 和 Ω_5 中时, $y^2-x^2 > 2$, 故 $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = -1$; 当点在 Ω_2, Ω_3 和 Ω_4 中时, $y^2-x^2 < 2$, 故 $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) = 1$. 于是,

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) dx dy \\ &= \iint_{\Omega_1} dx dy - \iint_{\Omega_2} dx dy + \iint_{\Omega_3} dx dy + \iint_{\Omega_4} dx dy + \iint_{\Omega_5} dx dy \\ &= -4 \int_0^1 dx \int_{\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy + 4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} dy + 4 \int_1^2 dx \int_1^{\sqrt{4-x^2}} dy \\ &= -8 \int_0^1 \sqrt{2+x^2} dx + 4 \left(\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx - \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx \right) \\ &= -\frac{4\pi}{3} + 8 \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

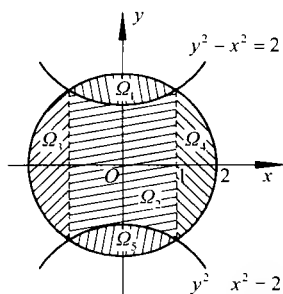


图 8.30

【3975】 $\iint_{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2} [x+y] dx dy.$

解题思路 注意:

当 $0 \leq x+y < 1$ 时, $[x+y] = 0$; 当 $1 \leq x+y < 2$ 时, $[x+y] = 1$; 当 $2 \leq x+y < 3$ 时, $[x+y] = 2$; 当 $3 \leq x+y < 4$ 时, $[x+y] = 3$; 当 $x+y=4$ 时, $[x+y] = 4$.

现将区域 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ 分成四个子域 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 及 Ω_4 , 它们依次为

$$\Omega_1: x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0; \quad \Omega_2: 1 \leq x+y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0;$$

$$\Omega_3: 2 \leq x+y \leq 3, x \leq 2, y \leq 2; \quad \Omega_4: x+y \geq 3, x \leq 2, y \leq 2.$$

当点属于 Ω_1 的内部时, $[x+y] = 0$; 当点属于 Ω_2 的内部时, $[x+y] = 1$; 当点属于 Ω_3 的内部时, $[x+y] = 2$; 当点属于 Ω_4 的内部时, $[x+y] = 3$.

注意 $\iint_{\Omega_i} dx dy$ 为区域 Ω_i 的面积 ($i=1, 2, 3, 4$), 问题即易获解.

解 当 $0 \leq x+y < 1$ 时, $[x+y] = 0$; 当 $1 \leq x+y < 2$ 时, $[x+y] = 1$;
当 $2 \leq x+y < 3$ 时, $[x+y] = 2$; 当 $3 \leq x+y < 4$ 时, $[x+y] = 3$;
当 $x+y = 4$ 时, $[x+y] = 4$.

如图 8.31 所示, 区域 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ 可分为下列四部分:

$$\Omega_1: x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0; \quad \Omega_2: 1 \leq x+y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0;$$

$$\Omega_3: 2 \leq x+y \leq 3, x \leq 2, y \leq 2; \quad \Omega_4: x+y \geq 3, x \leq 2, y \leq 2.$$

当点属于 Ω_1 的内部时, $[x+y] = 0$; 当点属于 Ω_2 的内部时, $[x+y] = 1$; 当点属于 Ω_3 的内部时, $[x+y] = 2$; 当点属于 Ω_4 的内部时, $[x+y] = 3$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2}} [x+y] dx dy &= \iint_{\Omega_1} dx dy + 2 \iint_{\Omega_2} dx dy + 3 \iint_{\Omega_3} dx dy \\ &+ 4 \iint_{\Omega_4} dx dy \\ &= 2 \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^{1-x} dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy \right] + 4 \left[\int_{\frac{3}{2}}^2 dx \int_0^{2-x} dy + \int_{\frac{3}{2}}^2 dx \int_{2-x}^2 dy \right] + 6 \int_{\frac{3}{2}}^2 dx \int_{2-x}^2 dy \\ &= 2 \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1) dx + \int_1^2 (2-x) dx \right] + 4 \left[\int_{\frac{3}{2}}^2 (2x-2) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 dx \right] + 6 \int_{\frac{3}{2}}^2 (2x-3) dx = 6. \end{aligned}$$

【3976】 $\iint_{x^2 \leq y \leq 1} \sqrt{y-x^2} dx dy.$

解题思路 注意:

当 $x^2 \leq y < x^2+1$ 时, $[y-x^2] = 0$; 当 $x^2+1 \leq y < x^2+2$ 时, $[y-x^2] = 1$; 当 $x^2+2 \leq y < x^2+3$ 时, $[y-x^2] = 2$; 当 $x^2+3 \leq y < 4$ 时, $[y-x^2] = 3$.

又抛物线 $y=x^2+3, y=x^2+2, y=x^2+1$ 及 $y=x^2$ 与直线 $y=4$ 在第一象限内的交点依次为 $(1, 4), (\sqrt{2}, 4), (\sqrt{3}, 4)$ 及 $(2, 4)$, 与 Oy 轴对称的位置还有四个交点.

从而, 问题可获解.

解 如图 8.32 所示.

当 $x^2 \leq y < x^2+1$ 时, $[y-x^2] = 0$; 当 $x^2+1 \leq y < x^2+2$ 时, $[y-x^2] = 1$;
当 $x^2+2 \leq y < x^2+3$ 时, $[y-x^2] = 2$; 当 $x^2+3 \leq y < 4$ 时, $[y-x^2] = 3$.

抛物线 $y=x^2+3, y=x^2+2, y=x^2+1$ 及 $y=x^2$ 与直线 $y=4$ 在第一象限内的交点为 $A(1, 4), B(\sqrt{2}, 4), C(\sqrt{3}, 4)$ 及 $D(2, 4)$, 与 Oy 轴对称的位置还有四个交点. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{x^2 \leq y \leq 4} \sqrt{y-x^2} dx dy &= 2 \left[\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{x^2+1} dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2+1}^{x^2+2} dy \right] + 2\sqrt{2} \left[\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2+1}^{x^2+2} dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2+2}^{x^2+3} dy \right] \\ &+ 2\sqrt{3} \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{x^2+3}^4 dy \\ &= 2 \left[\sqrt{2} + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (3-x^2) dx \right] + 2\sqrt{2} \left[1 + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (2-x^2) dx \right] + 2\sqrt{3} \int_{\sqrt{3}}^2 (1-x^2) dx \\ &= \frac{4}{3} (4+4\sqrt{3}-3\sqrt{2}). \end{aligned}$$

【3977】 设 m 及 n 为正整数且其中至少有一个是奇数, 证明:

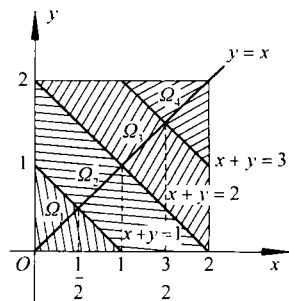


图 8.31

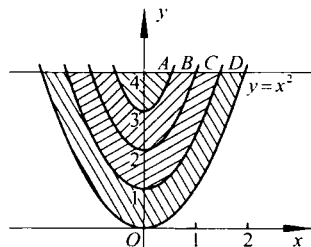


图 8.32

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0.$$

证明思路 作变换 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 并注意 $\cos \varphi$ 及 $\sin \varphi$ 均为以 2π 为周期的周期函数, 即可得

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy &= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_0^{2\pi} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi = \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \\ &= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \right]. \end{aligned}$$

若在上式右端的第二个积分中令 $\varphi = \pi + t$, 即得

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1 + (-1)^{m+n}] \cos^m t \sin^n t dt.$$

从而, 命题易获证.

证 作变换 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 则得

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy &= \iint_{0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi < 2\pi} r^{m+n+1} \cos^m \varphi \sin^n \varphi dr d\varphi = \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_0^{2\pi} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \\ &= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi = \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

若在上式右端的第二个积分中令 $\varphi = \pi + t$, 即得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi = (-1)^m (-1)^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t \sin^n t dt.$$

当 m 及 n 中有且仅有一个为奇数时, $(-1)^m (-1)^n = -1$, 因而, (1) 式为零. 当 m 和 n 均为奇数时, $(-1)^m (-1)^n = 1$, 因而, (1) 式等于 $\frac{2a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi$. 但此被积函数在对称区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为奇函数, 故积分仍然为零.

总之, 当 m 和 n 中至少有一个为奇数时,

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0.$$

【3978】 求

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy,$$

其中 $f(x, y)$ 为连续函数.

提示 利用积分中值定理及函数 $f(x, y)$ 的连续性.

解 利用积分中值定理, 即得

$$\iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} dx dy = \pi \rho^2 f(\xi, \eta),$$

其中点 (ξ, η) 为圆域 $x^2 + y^2 \leq \rho^2$ 内的一点. 显然, 当 $\rho \rightarrow 0$ 时, 点 $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$. 于是, 根据函数 $f(x, y)$ 的连续性知,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\xi, \eta) = f(0, 0).$$

【3979】 设 $F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} e^{\frac{u}{\sqrt{v}}} dx dy$, 求 $F'(t)$.

解 令 $x = ut, y = vt$, 则 $F(t) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} e^{\frac{u}{\sqrt{v}}} du dv = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} t^2 e^{\frac{u}{\sqrt{v}}} du dv \quad (1)$

于是, 似乎应该有

$$F'(t) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} 2t e^{\frac{u}{\sqrt{v}}} du dv = \frac{2}{t} \iint_{u^2+v^2 \leq 1} t^2 e^{\frac{u}{\sqrt{v}}} du dv = \frac{2}{t} F(t) \quad (t > 0).$$

但这是错误的. 实际上本题有问题, 因为(1)式中的二重积分都是广义二重积分. 当 $t > 0$ 时, 在 $x > 0, y = 0$ 上 (即 $u > 0, v = 0$ 上) 被积函数成为无穷, 而且这个广义二重积分是发散的. 这是因为, 根据被积函数的非负性, 有 (参看本书 § 9)

$$\iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{\frac{u}{v^2}} du dv = \int_0^1 dv \int_0^1 e^{\frac{u}{v^2}} du = \int_0^1 v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1) dv. \quad (2)$$

对此积分, $v = 0$ 是瑕点, 由于被积函数 $v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1)$ 在 $0 \leq v \leq 1$ 上非负, 且 (令 $\frac{1}{v^2} = t$)

$$\lim_{v \rightarrow +0} v^2 [v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t - 1}{t^2} = +\infty,$$

故瑕积分 $\int_0^1 v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1) dv$ 发散, 且 $\int_0^1 v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1) dv = +\infty$. 由此, 再根据(1)式与(2)式, 得

$$F(t) = +\infty \quad (\text{当 } t > 0 \text{ 时}).$$

因此, 提出求 $F'(t)$ 的问题是无意义的.

注意, 若本题换为: 设
$$F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{\frac{u}{v^2}} dx dy,$$

求 $F'(t)$. 这时得 (作代换 $x = ut, y = vt$)

$$F(t) = t^2 \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{\frac{u}{v^2}} du dv.$$

从而, 右端积分是收敛的, (实际上可视为常义积分). 于是,

$$F'(t) = 2t \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{\frac{u}{v^2}} du dv = \frac{2}{t} F(t) \quad (t > 0).$$

【3980】 设 $F(t) = \iint_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 求 $F'(t)$.

解 作变量代换 $x = u + t, y = v + t$ (t 固定), 则

$$F(t) = \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} \sqrt{(u+t)^2 + (v+t)^2} du dv. \quad (1)$$

今在积分号下求导数^{*}, 得

$$F'(t) = \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} \frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2 + (v+t)^2}} du dv = \iint_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1} \frac{x+y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \quad (-\infty < t < +\infty).$$

*) 积分号下求导数的合理性, 证明如下: 令

$$f(u, v, t) = \sqrt{(u+t)^2 + (v+t)^2},$$

则
$$f'_t(u, v, t) = \frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2 + (v+t)^2}} \quad ((u, v) \neq (-t, -t)).$$

当 $(u, v) = (-t, -t)$ 时, 易知 $f'_t(u, v, t)$ 不存在, 但右导数存在且等于 $\sqrt{2}$, 左导数也存在且等于 $-\sqrt{2}$. 由于对任何数 a, b , 有 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 故 $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$, 从而, $\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \sqrt{2}$. 于是,

$$|f'_t(u, v, t)| \leq \sqrt{2} \quad ((u, v) \neq (-t, -t)). \quad (2)$$

如果 $|t| > \frac{1}{\sqrt{2}}$, 这时 $f(u, v, t), f'_t(u, v, t)$ (t 固定) 都是区域 $u^2 + v^2 \leq 1$ 上的连续函数, 当然可在积分号下求导数, 得

$$F'(t) = \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} f'_t(u, v, t) du dv. \quad (3)$$

但如果 $|t| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, 则(3)式右端积分的被积函数 $f'_t(u, v, t)$ 在积分域 $u^2 + v^2 \leq 1$ 中的点 $(u, v) = (-t, -t)$ 不

连续. 因此, 不能立即断定(3)式的正确性. 下面不论 t 为何值 $(-\infty < t < +\infty)$, 直接证明(3)式成立. 令

$$g(t) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f'_t(u, v, t) du dv \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (4)$$

由(2)式知 $f'_t(u, v, t)$ 是有界的, 且在区域 $u^2 + v^2 \leq 1$ 上至多有一个不连续点(t 固定), 故(4)式右端的积分存在. 实际上, 利用(2)式以及 $f'_t(u, v, t)$ 当 $(u, v) \neq (-t, -t)$ 时的连续性, 用(必要时, 即 $|t| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时)挖掉以点 $(-t, -t)$ 为中心的小圆域的方法, 不难证明 $g(t)$ 是 $-\infty < t < +\infty$ 上的连续函数(详细证明留给读者). 令

$$G(t) = \int_0^t g(s) ds \quad (-\infty < t < +\infty),$$

则

$$G'(t) = g(t) \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (5)$$

但

$$G(t) = \int_0^t ds \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f'_t(u, v, s) du dv = \iiint_{\substack{u^2+v^2 \leq 1 \\ 0 \leq s \leq t}} f'_t(u, v, s) du dv ds = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} du dv \int_0^t f'_t(u, v, s) ds. \quad (6)$$

注意, (6)式中的运算是合理的, 因为三维区域 $u^2 + v^2 \leq 1, 0 \leq s \leq t$ (t 固定)中, 三元函数 $f'_t(u, v, s)$ 有界且只在直线 $u = v = -s$ 的一段上不连续, 从而, (6)式中的三重积分及两个累次积分都存在, 故它们相等.

下证恒有

$$\int_0^t f'_t(u, v, s) ds = f(u, v, t) - f(u, v, 0). \quad (7)$$

事实上, 若 $(u, v) \neq (-t_1, -t_1) (t_1 \in [0, t])$, 则 $f'_t(u, v, t)$ 是 $0 \leq s \leq t$ 上的连续函数(u, v 固定), 从而, (7)式成立; 若 $(u, v) = (-t_1, -t_1) (t_1 \text{ 是属于 } [0, t] \text{ 的某数})$, 则由 $f(u, v, s)$ 对任何 u, v, s 的连续性, 有

$$\begin{aligned} \int_0^t f'_t(u, v, s) ds &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{t_1-\epsilon} f'_t(u, v, s) ds + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_1+\epsilon}^t f'_t(u, v, s) ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [f(u, v, t_1 - \epsilon) - f(u, v, 0)] + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [f(u, v, t) - f(u, v, t_1 + \epsilon)] \\ &= f(u, v, t_1) - f(u, v, 0) + f(u, v, t) - f(u, v, t_1) \\ &= f(u, v, t) - f(u, v, 0), \end{aligned}$$

故(7)式恒成立. 代入(6)式, 得 $G(t) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} [f(u, v, t) - f(u, v, 0)] du dv = F(t) - F(0) \quad (-\infty < t < +\infty)$.

由此, 再注意到(5)式, 即知 $F'(t)$ 存在, 且

$$F'(t) = G'(t) = g(t) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f'_t(u, v, t) du dv \quad (-\infty < t < +\infty).$$

即(3)式成立.

【3981】 设 $F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) dx dy \quad (t > 0)$, 求 $F'(t)$.

解题思路 令 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 则积分域 $x^2 + y^2 \leq t^2$ 变为

$$\Omega' = \{0 \leq r \leq t, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \quad \text{且} \quad F(t) = \int_0^t dr \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi.$$

利用 2302 题的结果即易获解.

解 令 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 则

$$F(t) = \int_0^t dr \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi.$$

故得

$$F'(t) = \int_0^{2\pi} f(t \cos \varphi, t \sin \varphi) t d\varphi.$$

注意, 此题中应假定 $f(x, y)$ 是连续函数.

【3982】 证明: 若 $f(x, y)$ 连续, 则函数

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{\xi-x}^{\xi-y} f(\xi, \eta) d\eta$$

满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

证明思路 利用含参变量的常义积分求导数的公式, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) + f(\xi, \xi-x+y)] d\xi$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \int_0^x [f'_y(\xi, x+y-\xi) - f'_y(\xi, \xi-x+y)] d\xi + f(x, y).$$

同法可求得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) - f(\xi, \xi-x+y)] d\xi,$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \int_0^x [f'_y(\xi, x+y-\xi) - f'_y(\xi, \xi-x+y)] d\xi.$$

于是, 命题易获证.

证 利用含参变量的常义积分求导数的公式, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2} \int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) - (-1)f(\xi, \xi-x+y)] d\xi + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} f(x, \eta) d\eta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) + f(\xi, \xi-x+y)] d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \int_0^x [f'_y(\xi, x+y-\xi) - f'_y(\xi, \xi-x+y)] d\xi + \frac{1}{2} [f(x, x+y-x) + f(x, x-x+y)] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x [f'_y(\xi, x+y-\xi) - f'_y(\xi, \xi-x+y)] d\xi + f(x, y). \end{aligned}$$

同理, 有

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) - f(\xi, \xi-x+y)] d\xi, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \int_0^x [f'_y(\xi, x+y-\xi) - f'_y(\xi, \xi-x+y)] d\xi.$$

于是, 得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$, 证毕.

注意 显然本题还应假定 $f'_y(x, y)$ 存在且连续.

【3983】 设函数 $f(x, y)$ 的等值线是简单封闭曲线, 区域 $S(v_1, v_2)$ 由曲线 $f(x, y) = v_1$ 及 $f(x, y) = v_2$ 围成. 证明:

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv,$$

其中 $F(v)$ 为曲线 $f(x, y) = v_1$ 与 $f(x, y) = v_2$ 所包围的面积.

提示 用函数的无限接近的等值线把积分域 $S(v_1, v_2)$ 分为许多子域, 并利用积分中值定理及微分中值定理, 即可获证.

证 作 $[v_1, v_2]$ 的任一分划 $T: v_1 = v'_0 < v'_1 < \dots < v'_i < \dots < v'_n = v_2$.

令 $d(T) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta v_i$, 这里 $\Delta v_i = v'_i - v'_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 于是, 由积分中值定理(这里假定了 $f(x, y)$ 在 $S(v_1, v_2)$ 上连续)知,

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{S(v'_{i-1}, v'_i)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta S_i,$$

其中 ΔS_i 表小环形域 $S(v'_{i-1}, v'_i)$ (如图 8.33 阴影部分所示) 的面积, $\bar{P}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in S(v'_{i-1}, v'_i)$.

令 $v_i^* = f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, 则 $v'_{i-1} \leq v_i^* \leq v'_i$. 又显然(利用微分中值定理)有

$$\Delta S_i = F(v'_i) - F(v'_{i-1}) = F'(\bar{v}_i)(v'_i - v'_{i-1}) = F'(\bar{v}_i) \Delta v_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

其中 $v'_{i-1} \leq \bar{v}_i \leq v'_i$. 这里我们假定了 $F'(v)$ 在 $[v_1, v_2]$ 上存在且可积, 于是它有界, 即

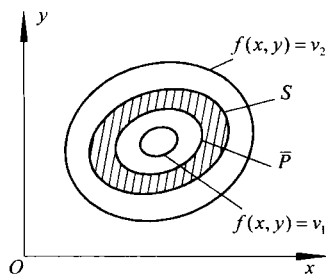


图 8.33

$$|F'(v)| \leq M = \text{常数} \quad (v_1 \leq v \leq v_2). \quad (1)$$

我们有

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n v_i^* F'(\bar{v}_i) \Delta v_i = I_1 + I_2, \quad (2)$$

其中

$$I_1 = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i F'(\bar{v}_i) \Delta v_i, \quad I_2 = \sum_{i=1}^n (v_i^* - \bar{v}_i) F'(\bar{v}_i) \Delta v_i.$$

由于 $F'(v)$ 在 $[v_1, v_2]$ 上可积, 故 $v F'(v)$ 也在 $[v_1, v_2]$ 上可积. 因此,

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} I_1 = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{v}_i F'(\bar{v}_i) \Delta v_i = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv. \quad (3)$$

另一方面, 由(1)式知

$$|I_2| \leq M d(T) \sum_{i=1}^n \Delta v_i = M(v_2 - v_1) d(T),$$

故

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} I_2 = 0. \quad (4)$$

现在(2)式两端令 $d(T) \rightarrow 0$ 取极限(注意(2)式左端是常数), 并注意到(3)式与(4)式, 即得

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv.$$

证毕.

应当指出, 正如上面所说的, 本题应假定 $f(x, y)$ 在 $S(v_1, v_2)$ 上连续, 而 $F'(v)$ 在 $[v_1, v_2]$ 上存在并且可积.

§ 2. 面积的计算法

Oxy 平面上区域 S 的面积由以下公式给出: $S = \iint_S dx dy$.

求下列曲线所界的面积:

【3984】 $xy = a^2, x + y = \frac{5a}{2} \quad (a > 0).$

解 两曲线的交点为 $A(\frac{a}{2}, 2a)$ 和 $B(2a, \frac{a}{2})$ (图 8.34), 故所求面积为

$$S = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} dx \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{5a}{2}-x} dy = \frac{15}{8} a^2 - 2a^2 \ln 2.$$

【3985】 $y^2 = 2px + p^2, y^2 = -2qx + q^2 \quad (p > 0, q > 0).$

解 曲线的交点为 $A(\frac{q-p}{2}, \sqrt{pq})$ 和 $B(\frac{q+p}{2}, -\sqrt{pq})$ (图 8.35),

故所求面积为 $S = 2 \int_0^{\sqrt{pq}} dy \int_{\frac{y^2 - p^2}{2p}}^{\frac{q^2 - y^2}{2q}} dx = \frac{2}{3} (p+q) \sqrt{pq}.$

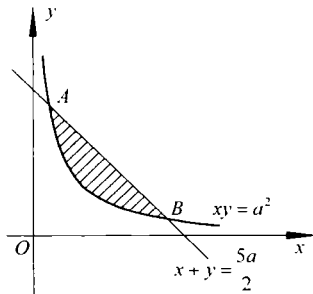


图 8.34

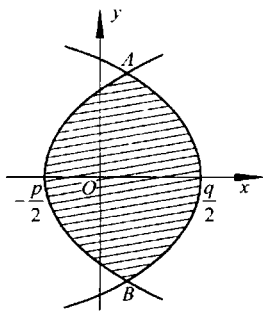


图 8.35

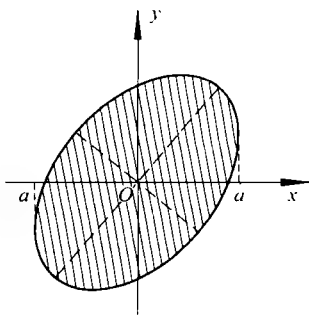


图 8.36

【3986】 $(x-y)^2 + x^2 = a^2 \quad (a>0).$

解 如图 8.36 所示, 所求面积的区域为:

$$-a \leq x \leq a, \quad x - \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq x + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

于是, 所求的面积为

$$S = \int_{-a}^a dx \int_{x - \sqrt{a^2 - x^2}}^{x + \sqrt{a^2 - x^2}} dy = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \pi a^2.$$

变换为极坐标, 计算下列曲线所围的面积:

【3987】 $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2); \quad x^2 + y^2 \geq a^2.$

解 曲线的极坐标方程为 $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi; \quad r \geq a.$

它们的交点在第一象限内为 $(a, \frac{\pi}{6})$, 如图 8.37 所示. 利用对称性,

得所求面积为

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_a^{\sqrt{2a^2 \cos 2\varphi}} r dr - 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2a^2 \cos 2\varphi - a^2) d\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{3} \pi a^2.$$

【3988】 $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2; \quad x \geq 0, y \geq 0.$

解 将方程化为极坐标方程, 得 $(r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta)^2 = r^2,$

即

$$r^2 = \frac{1}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}).$$

曲线所围的面积为

$$S = \iint_{\Sigma} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}.$$

由于

$$\frac{1}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \sin \theta \cos \theta} \right),$$

又

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin \theta + \cos \theta} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\ln \tan \frac{\theta + \frac{\pi}{4}}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \tan \frac{3\pi}{8} - \ln \tan \frac{\pi}{8} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} - \ln \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} \right) = \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}), \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \sin \theta \cos \theta} d\theta &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta\right)}{2\left(\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta\right)^2 + \frac{1}{2}} = 2 \arctan(\sin \theta - \cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi. \end{aligned}$$

于是, 所求的面积为 $S = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \sin \theta \cos \theta} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{3} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi}{6}.$

*) 利用 2053 题的结果, 其中 $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{3}{2}, A = -2, B = 0.$

【3989】 $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2) \quad (a>0).$

解 显然曲线关于 Ox 轴对称, 故只要求出 $y \geq 0$ 的部分. 化为极坐标, 方程为

$$r = a \cos \theta (4 \cos^2 \theta - 3).$$

由于必须 $x^3 - 3xy^2 \geq 0$, 故 $\cos \theta (4 \cos^2 \theta - 3) \geq 0$. 因此, $\cos \theta \geq 0$ 且 $\cos \theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\cos \theta \leq 0$ 且 $\cos \theta \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故

$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi - \frac{\pi}{6}, \pi + \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \pi + \frac{\pi}{6}.$ 于是, 在 Ox 轴的上方部分 ($y \geq 0$) 为

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad \text{和} \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi - \frac{\pi}{6}.$$

由此可知

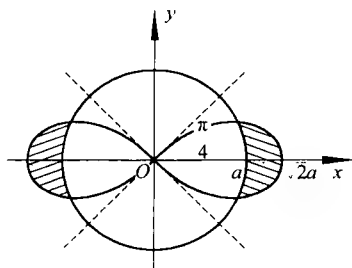


图 8.37

$$S = \iint_S r dr d\theta = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} r^2 d\theta \right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta.$$

在上式右端第二个积分中作代换 $\theta = \pi - \varphi$, 则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta.$$

故

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta - a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (16 \cos^6 \theta - 24 \cos^4 \theta + 9 \cos^2 \theta) d\theta \\ - a^2 \left(16 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 24 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi a^2}{4}.$$

【3990】 $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2 xy$; $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2$ ($a > 0$).

解 将方程化为极坐标方程, 得(双纽线)

$$r^4 - 8a^2 r^2 \cos \theta \sin \theta, \quad \text{即} \quad r = 2a \sqrt{\sin 2\theta};$$

与圆周 $(r \cos \theta - a)^2 + (r \sin \theta - a)^2 = a^2$, 即 $r = a(\cos \theta + \sin \theta) \pm a \sqrt{\sin 2\theta}$.

显然, 两条曲线关于射线 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 是对称的. 令

$$2a \sqrt{\sin 2\theta} = a(\cos \theta + \sin \theta) - a \sqrt{\sin 2\theta},$$

解得交点的极角 $\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}$. 于是, 所求的面积为

$$S = \iint_S r dr d\theta = \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \left\{ (2a \sqrt{\sin 2\theta})^2 - [a(\cos \theta + \sin \theta) - a \sqrt{\sin 2\theta}]^2 \right\} d\theta \\ = \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} [2a^2 \sin 2\theta + 2a^2 (\sin \theta + \cos \theta) \sqrt{\sin 2\theta} - a^2] d\theta.$$

注意到 $\int (\sin \theta + \cos \theta) \sqrt{\sin 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} (\sin \theta - \cos \theta) \sqrt{\sin 2\theta} + \frac{1}{2} \arcsin(\sin \theta - \cos \theta) + C$, 即得

$$S = a^2 \left[-\cos 2\theta + (\sin \theta - \cos \theta) \sqrt{\sin 2\theta} + \arcsin(\sin \theta - \cos \theta) - \theta \right] \Big|_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \\ = a^2 \left[-\frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{7}}{8} + \frac{\sqrt{14}}{4} \sqrt{\frac{1}{8}} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} \right] = a^2 \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} \right) \\ = a^2 \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8} \right)^{**}.$$

*) 利用三角恒等式

$$\sqrt{\sin 2x} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \right) \sqrt{\tan x}, \quad \sqrt{\sin 2x} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \right) \sqrt{\cot x}$$

化为二项微分式的积分, 参看 А. Ф. Тимофеев 《ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ》第五章 § 15.

**) 容易证明: $\arcsin \frac{\sqrt{14}}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} = \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}$. 事实上, 我们有

$$\sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{14}}{8} + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} \right) = \frac{3\sqrt{14}}{32} + \frac{5\sqrt{14}}{32} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

根据以下公式引入广义极坐标 r 和 φ :

$$x = a r \cos^a \varphi, \quad y = b r \sin^a \varphi \quad (r \geq 0),$$

其中 a, b 和 α 为以适当的方法选出的常数, 且考虑到 $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = a b r \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi$, 求由下列曲线所围的面积(假定参数是正的):

【3991】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x}{h} + \frac{y}{k}.$

解 不失一般性, 设 $k > 0, h > 0$. 令 $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$, 则方程化为

$$r = \frac{a}{h} \cos \varphi + \frac{b}{k} \sin \varphi.$$

由于 $r \geq 0$, 故有

$$\frac{a}{h} \cos \varphi + \frac{b}{k} \sin \varphi \geq 0,$$

因此, 首先必须 $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$. 同时, 应有 $\cos \varphi \geq 0$ 且 $\tan \varphi \geq \frac{ak}{bh}$ 或者 $\cos \varphi < 0$ 且 $\tan \varphi \leq -\frac{ak}{bh}$.

从而, 极角 φ 应满足不等式 $-\arctan \frac{ak}{bh} \leq \varphi \leq \pi - \arctan \frac{ak}{bh}$. 于是, 曲线所围的面积为

$$S = \iint_S ab r dr d\varphi = \frac{ab}{2} \int_{-\arctan \frac{ak}{bh}}^{\pi - \arctan \frac{ak}{bh}} \left(\frac{a}{h} \cos \varphi + \frac{b}{k} \sin \varphi \right)^2 d\varphi = \frac{ab}{2} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right) \int_{-\arctan \frac{ak}{bh}}^{\pi - \arctan \frac{ak}{bh}} \sin^2(\varphi + \alpha_0) d\varphi,$$

其中 $\alpha_0 = \arctan \frac{ak}{bh}$. 从而, 我们有

$$S = \frac{ab}{2} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right) \left[\frac{\varphi + \alpha_0}{2} - \frac{1}{4} \sin 2(\varphi + \alpha_0) \right] \Big|_{-\arctan \frac{ak}{bh}}^{\pi - \arctan \frac{ak}{bh}} = \frac{ab}{2} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi ab}{4} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right).$$

【3992】 $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}; \quad x \geq 0, y \geq 0.$

解 令 $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$, 则方程化为

$$r = \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}.$$

于是, 曲线所围的面积为

$$S = \iint_S ab r dr d\theta = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi - \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4 \cos^4 \varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^4 \sin^4 \varphi + 2\left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi.$$

根据 И. М. 雷日克、И. С. 格拉德什坦编著的《函数表与积分表》2.125、2.126 知:

$$\int \frac{\cos^4 \varphi d\varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} = \int \frac{1}{(1 + \tan^3 \varphi)} d(\tan \varphi) \\ = \frac{\tan \varphi}{3(1 + \tan^3 \varphi)} + \frac{2}{9} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\tan \varphi + 1)^2}{\tan^2 \varphi - \tan \varphi + 1} + \sqrt{3} \arctan \frac{2 \tan \varphi - 1}{\sqrt{3}} \right] + C.$$

从而,

$$\frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4 \cos^4 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi \\ = \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^4 \left\{ \frac{\tan \varphi}{3(1 + \tan^3 \varphi)} + \frac{2}{9} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\tan \varphi + 1)^2}{\tan^2 \varphi - \tan \varphi + 1} + \sqrt{3} \arctan \frac{2 \tan \varphi - 1}{\sqrt{3}} \right] \right\} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}} \left(\frac{a}{h}\right)^4;$$

又

$$\int \frac{\sin^4 \varphi d\varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} = \int \frac{\tan^4 \varphi}{(1 + \tan^3 \varphi)^2} d(\tan \varphi) = \frac{\tan^3 \varphi}{3(1 + \tan^3 \varphi)} - \frac{2}{3} \int \frac{\tan^4 \varphi}{1 + \tan^3 \varphi} d(\tan \varphi) \\ = \frac{\tan^3 \varphi}{3(1 + \tan^3 \varphi)} - \frac{2}{3} \left\{ \frac{\tan^2 \varphi}{2} + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\tan \varphi + 1)^2}{\tan^2 \varphi - \tan \varphi + 1} - \sqrt{3} \arctan \frac{2 \tan \varphi - 1}{\sqrt{3}} \right] \right\} + C,$$

从而,

$$\frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{b}{k}\right)^4 \sin^4 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi \\ = \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k}\right)^4 \left\{ \frac{\tan^3 \varphi}{3(1 + \tan^3 \varphi)} - \frac{\tan^2 \varphi}{3} - \frac{2}{9} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\tan \varphi + 1)^2}{\tan^2 \varphi - \tan \varphi + 1} - \sqrt{3} \arctan \frac{2 \tan \varphi - 1}{\sqrt{3}} \right] \right\} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k}\right)^4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}} \left(\frac{b}{k}\right)^4;$$

此外,还有

$$\int \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} = \int \frac{\tan^2 \varphi}{(1 + \tan^3 \varphi)^2} d(\tan \varphi) = -\frac{1}{3(1 + \tan^3 \varphi)} + C,$$

从而,

$$\frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi = ab \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2 \left[-\frac{1}{3(1 + \tan^3 \varphi)} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{3} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2.$$

于是,曲线所围的面积为

$$S = \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}} \left(\frac{a}{h}\right)^4 + \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}} \left(\frac{b}{k}\right)^4 + \frac{ab}{3} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2 = \frac{ab}{3} \left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4}\right) + \frac{a^2 b^2}{h^2 k^2} \right].$$

【3993】 $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 - \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2} \quad (x > 0, y > 0).$

解 解法 1:

令 $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, 则方程化为

$$r^2 = \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$$

于是,曲线所围的面积为 $S = \iint_S ab r dr d\varphi = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi.$

注意到

$$\begin{aligned} & \int \frac{\cos^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi - \int \frac{1}{(1 + \tan \varphi)^4} d(\tan \varphi) = -\frac{1}{3(1 + \tan \varphi)^3} + C, \\ & \int \frac{\sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi = \int \frac{\tan^2 \varphi}{(1 + \tan \varphi)^4} d(\tan \varphi) = \int \frac{(\tan \varphi - 1)(\tan \varphi + 1) + 1}{(1 + \tan \varphi)^4} d(\tan \varphi) \\ & = \int \frac{1}{(1 + \tan \varphi)^2} d(\tan \varphi) - 2 \int \frac{1}{(1 + \tan \varphi)^3} d(\tan \varphi) + \int \frac{1}{(1 + \tan \varphi)^4} d(\tan \varphi) \\ & = -\frac{1}{1 + \tan \varphi} + \frac{1}{(1 + \tan \varphi)^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{(1 + \tan \varphi)^3} + C, \end{aligned}$$

于是,所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left[-\frac{1}{3(1 + \tan \varphi)^3} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k}\right)^2 \left[-\frac{1}{1 + \tan \varphi} + \frac{1}{(1 + \tan \varphi)^2} - \frac{1}{3(1 + \tan \varphi)^3} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right). \end{aligned}$$

解法 2:

令 $x = h r \cos \varphi$, $y = k r \sin \varphi$, 则方程化为

$$r^2 = \frac{1}{\left(\frac{h}{a} \cos \varphi + \frac{k}{b} \sin \varphi\right)^4} = \left[\frac{a^2 b^2}{(hb)^2 + (ka)^2} \right]^2 \frac{1}{\sin^4(\varphi + \alpha)} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}),$$

其中 $\tan \alpha = \frac{hb}{ka}$. 于是,曲线所围的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_S h k r dr d\varphi = \frac{h k a^4 b^4}{[(hb)^2 + (ka)^2]^2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^4(\varphi + \alpha)} \\ &= \frac{h k a^4 b^4}{[(hb)^2 + (ka)^2]^2} \left[-\frac{1}{6} \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sin^3(\varphi + \alpha)} - \frac{1}{3} \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sin(\varphi + \alpha)} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{h k a^4 b^4}{[(hb)^2 + (ka)^2]^2} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \right) + \frac{1}{3} (\tan \alpha + \cot \alpha) \right] \\ &= \frac{h k a^4 b^4}{[(hb)^2 + (ka)^2]^2} \cdot \frac{1}{6} \frac{[(hb)^2 + (ka)^2]^3}{(h b k a)^4} = \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right). \end{aligned}$$

*) 利用 2012 题的结果.

$$**) \quad \text{由 } \tan \alpha = \frac{hb}{ka} \text{ 知 } \cot \alpha = \frac{ka}{hb}, \quad \sin \alpha = \frac{hb}{\sqrt{(hb)^2 + (ka)^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{ka}{\sqrt{(hb)^2 + (ka)^2}}.$$

$$\text{【3994】} \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2} \quad (x > 0, y > 0).$$

解 令 $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, 则方程化为

$$r^2 = \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi - \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4}.$$

$$\text{由于} \quad \left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi - \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi \geq 0, \quad \left(\frac{ak}{bh}\right)^2 \geq \tan^2 \varphi,$$

注意到 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 可知极角的变化区间为 $0 \leq \varphi \leq \arctan \frac{ak}{bh}$.

于是, 注意利用上题中两个不定积分的结果, 即得曲线所围的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\arctan \frac{ak}{bh}} ab r dr d\varphi - \frac{ab}{2} \int_0^{\arctan \frac{ak}{bh}} r^2 d\varphi = \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \int_0^{\arctan \frac{ak}{bh}} \frac{\cos^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi - \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k}\right)^2 \int_0^{\arctan \frac{ak}{bh}} \frac{\sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left[-\frac{1}{3(1+\tan \varphi)^3} \right] \Big|_0^{\arctan \frac{ak}{bh}} - \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k}\right)^2 \left[-\frac{3\tan^2 \varphi + 3\tan \varphi + 1}{3(1+\tan \varphi)^3} \right] \Big|_0^{\arctan \frac{ak}{bh}} \\ &= \frac{ab}{6} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left[\frac{-1}{\left(1+\frac{ak}{bh}\right)^3} + 1 \right] + \frac{ab}{6} \left(\frac{b}{k}\right)^2 \left[\frac{3\left(\frac{ak}{bh}\right)^2 + 3\left(\frac{ak}{bh}\right) + 1}{\left(1+\frac{ak}{bh}\right)^3} - 1 \right] \\ &= \frac{ab}{6} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \frac{(ak)^3 + 3(ak)^2 bh + 3ak(bh)^2}{(ak+bh)^3} + \frac{ab}{6} \left(\frac{b}{k}\right)^2 \frac{-(ak)^3}{(ak+bh)^3} \\ &= \frac{a^4 bk}{6h^2 (ak+bh)^3} (a^2 k^2 + 3akbh + 2b^2 h^2) - \frac{a^4 bk(ak+2bh)}{6h^2 (ak+bh)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{【3995】} \quad \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1; \quad x=0, \quad y=0.$$

提示 作变换 $x = a \cos^4 \varphi$, $y = b \sin^4 \varphi$, 则方程化为 $r=1$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$).

解 令 $x = a \cos^4 \varphi$, $y = b \sin^4 \varphi$, 则方程化为

$$r=1 \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$$

于是, 曲线所围的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8ab r \cos^7 \varphi \sin^7 \varphi d\varphi = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 \varphi \sin^7 \varphi d\varphi = 4ab \int_0^1 u^7 (1-u^2)^3 du \\ &= 4ab \int_0^1 (u^7 - 3u^9 + 3u^{11} - u^{13}) du = 4ab \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{14} \right) = \frac{ab}{70}. \end{aligned}$$

进行适当的变量代换, 求下列曲线所围的面积:

$$\text{【3996】} \quad x+y=a, \quad x+y=b, \quad y=ax, \quad y=\beta x \quad (0 < a < b; 0 < \alpha < \beta).$$

提示 作变换 $x+y=u$, $\frac{y}{x}=v$, 则 $a \leq u \leq b, \alpha \leq v \leq \beta$, 且有 $|I| = \frac{u}{(1+v)^2}$.

解 作变换 $x+y=u$, $\frac{y}{x}=v$, 则 $a \leq u \leq b, \alpha \leq v \leq \beta$, 且有 $|I| = \frac{u}{(1+v)^2}$.

$$\text{于是, 所求的面积为} \quad S = \int_a^b u du \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dv}{(1+v)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{(1+\alpha)(1+\beta)}.$$

$$\text{【3997】} \quad xy=a^2, \quad xy=2a^2, \quad y-x, \quad y=2x \quad (x>0; y>0).$$

提示 作变换 $xy=u$, $\frac{y}{x}=v$, 则 $a^2 \leq u \leq 2a^2, 1 \leq v \leq 2$, 且有 $|I| = \frac{1}{2v}$.

解 作变换 $xy=u, \frac{y}{x}=v$, 则 $a^2 \leq u \leq 2a^2, 1 \leq v \leq 2$, 且有 $|I| = \frac{1}{2v}$.

于是, 所求的面积为

$$S = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{2a^2} du \int_1^2 \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} a^2 \ln 2.$$

【3998】 $y^2 = 2px, y^2 + 2qx, x^2 = 2ry, x^2 = 2sy (0 < p < q; 0 < r < s)$.

提示 作变换 $\frac{y^2}{x} = u, \frac{x^2}{y} = v$, 则 $2p \leq u \leq 2q, 2r \leq v \leq 2s$, 且有 $|I| = \frac{1}{3}$.

解 作变换 $\frac{y^2}{x} = u, \frac{x^2}{y} = v$, 则 $2p \leq u \leq 2q, 2r \leq v \leq 2s$, 且有 $|I| = \frac{1}{3}$.

于是, 所求的面积为

$$S = \frac{1}{3} \int_{2p}^{2q} du \int_{2r}^{2s} dv = \frac{4}{3} (q-p)(s-r).$$

【3999】 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \frac{4x}{a} = \frac{y}{b} (a > 0, b > 0)$.

提示 作变换 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = u, \frac{x}{y} = v$, 即

$$x = \frac{u^2 v}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2}, \quad y = \frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},$$

则 $1 \leq u \leq 2, \frac{a}{4b} \leq v \leq \frac{a}{b}$, 且有

$$|I| = \frac{2u^3}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}.$$

解 作变换 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = u, \frac{x}{y} = v$, 即

$$x = \frac{u^2 v}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2}, \quad y = \frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},$$

则 $1 \leq u \leq 2, \frac{a}{4b} \leq v \leq \frac{a}{b}$, 且有

$$|I| = \frac{2u^3}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}.$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 du \int_{\frac{a}{4b}}^{\frac{a}{b}} \frac{dv}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4} = \frac{15}{2} \int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \frac{2atdt}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4} \\ &= 15a \int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \left[\frac{1}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^3} - \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{b}} + t\right)^4} \right] dt = 15a \left(\frac{7b}{72} - \frac{37b}{648} \right) = \frac{65ab}{108}. \end{aligned}$$

*) 作代换 $v = at^2$.

【4000】 $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1$, 其中 λ 取下列各值:

$$\frac{1}{3}c^2, \quad \frac{2}{3}c^2, \quad \frac{4}{3}c^2, \quad \frac{5}{3}c^2 \quad (x > 0, y > 0).$$

解 方程 $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1$ 可变为 $\lambda^2 - (x^2 + y^2 + c^2)\lambda + c^2 x^2 = 0$.

将 λ 作为未知量解方程, 不妨记方程的两个解为 λ 及 μ , 则

$$\lambda = \frac{x^2 + y^2 + c^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2}}{2}, \quad \mu = \frac{x^2 + y^2 + c^2 - \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2}}{2},$$

今设按上式作变量代换,将 (x, y) 变为 (λ, μ) . 易知

$$\left| \frac{D(\lambda, \mu)}{D(x, y)} \right| = \frac{4c^2 xy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2}} = \frac{4\sqrt{\lambda\mu(c^2 - \mu)(\lambda - c^2)}}{\lambda - \mu},$$

从而,

$$\frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} = \frac{1}{\frac{D(\lambda, \mu)}{D(x, y)}} = \frac{\lambda - \mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2 - \mu)(\lambda - c^2)}}.$$

于是,所求的面积为

$$S = \iint_D dx dy = \iint_{\substack{\frac{4c^2}{3} \leq \lambda \leq \frac{5c^2}{3} \\ \frac{c^2}{3} < \mu \leq \frac{2c^2}{3}}} \frac{\lambda - \mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2 - \mu)(\lambda - c^2)}} d\lambda d\mu = \frac{c^2}{4} \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{u - v}{\sqrt{uv(1 - v)(u - 1)}} du dv$$

$$= \frac{c^2}{4} \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{\sqrt{u} du}{\sqrt{u - 1}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dv}{\sqrt{v(1 - v)}} - \frac{c^2}{4} \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{du}{\sqrt{u(u - 1)}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{v} dv}{\sqrt{1 - v}}.$$

由于

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u - 1}} du = \frac{\sqrt{10}}{3} - \frac{2}{3} + \lg \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}, \quad \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{du}{\sqrt{u(u - 1)}} = 2 \lg \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}},$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dv}{\sqrt{v(1 - v)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1 - v}} dv = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}},$$

故最后得

$$S = \frac{c^2}{4} \left[\left(\frac{\sqrt{10}}{3} - \frac{2}{3} + \lg \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right) \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \right] - \frac{c^2}{4} \left[\left(2 \lg \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right) \right. \\ \left. \cdot \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \right] \\ = \frac{c^2}{6} (\sqrt{10} - 2) \arcsin \frac{1}{3}.$$

【4001】 求椭圆 $(a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 = 1$ (其中 $\delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$)的面积.

提示 作变换 $a_1 x + b_1 y + c_1 = u$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = v$, 则椭圆所围区域变为 $u^2 + v^2 \leq 1$, 且有 $|I| = \frac{1}{|\delta|}$.

解 作变换 $a_1 x + b_1 y + c_1 = u$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = v$, 则椭圆所围区域变为 $u^2 + v^2 \leq 1$, 且有 $|I| = \frac{1}{|\delta|}$.

于是,所求的面积为

$$S = \frac{1}{|\delta|} \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} du dv = \frac{\pi}{|\delta|}.$$

【4002】 求椭圆

$$\frac{x^2}{ch^2 u} + \frac{y^2}{sh^2 u} = c^2 \quad (u = u_1, u_2)$$

和双曲线 $\frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = c^2 \quad (v = v_1, v_2) \quad (0 < u_1 < u_2; 0 < v_1 < v_2; x > 0, y > 0)$

所围的面积.

提示 作变换 $x = chucosv$, $y = cshusinv$, 则有 $|I| = |c^2 ch^2 u - c^2 \cos^2 v|$.

解 作变换 $x = chucosv$, $y = cshusinv$, 则有 $|I| = |c^2 ch^2 u - c^2 \cos^2 v|$.

因为 $ch^2 u \geq 1 \geq \cos^2 v$, 故所求的面积为

$$S = c^2 \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} (ch^2 u - \cos^2 v) du dv = c^2 [(v_2 - v_1) \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + ch2u}{2} du - (u_2 - u_1) \int_{v_1}^{v_2} \cos^2 v dv] \\ = \frac{c^2}{4} [(v_2 - v_1) (sh2u_2 - sh2u_1) - (u_2 - u_1) (\sin2v_2 - \sin2v_1)].$$

【4003】 求平面 $x + y + z = b$ 与曲面 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = a^2$ 相截所得截面之面积.

解 为简化平面和曲面的方程,作变量代换

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} z, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{6}} x - \frac{2}{\sqrt{6}} y + \frac{1}{\sqrt{6}} z, \quad z' = \frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} y + \frac{1}{\sqrt{3}} z,$$

这是一个正交变换,故 $Ox'y'z'$ 成为一新的直角坐标系. 在新的坐标系下,平面方程为

$$z' - \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z) = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

由于 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$, $y = \frac{-\sqrt{6}}{3}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$, $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$,

故有 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] - \frac{3}{2}(x'^2 + y'^2).$

从而,曲面方程变为 $x'^2 + y'^2 = \frac{2}{3}a^2$. 于是,所求的面积为

$$S = \iint_{x'^2 + y'^2 \leq \frac{2}{3}a^2} dx' dy' = \frac{2}{3}\pi a^2.$$

【4004】 求平面 $z=1-2(x+y)$ 与曲面 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ 相截所得截面之面积.

解 平面被曲面所截部分记为 S ,它在 Oxy 平面上的投影记为 D . 由于平面 $z=1-2(x+y)$ 的法线之方向余弦为 $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{1}{3}$, 故 $D = S\cos\gamma = \frac{1}{3}S$, 从而, $S = 3D$, 显然 D 为 Oxy 平面上由曲线

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{1-2(x+y)} = 0$ (也即 $2x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$) 所围的区域. 作变量代换

$$x = u + v + \frac{1}{7}, \quad y = u - v + \frac{1}{7}.$$

于是, $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -2$, 且曲线 $2x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$ 变为 $7u^2 + v^2 - \frac{1}{7} = 0$, 这是一个椭圆(在 uv 平面上). 从而, 即得

$$D = \iint_D dx dy = 2 \iint_{7u^2 + v^2 \leq 1} du dv = 2\pi \left(\frac{1}{7}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \frac{2\pi}{7\sqrt{7}}.$$

由此,最后得

$$S = 3D = \frac{6\pi}{7\sqrt{7}}.$$

§ 3. 体积的计算法

如图 8.38 所示,设柱体顶面位于连续曲面 $z=f(x,y)$,底面位于平面 $z=0$,侧面垂直于底面,且底面在平面 Oxy 上所占区域 Ω 是可求积的,则,柱体的体积等于

$$V = \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy.$$

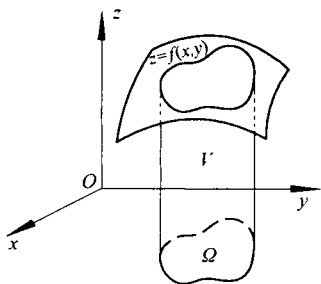


图 8.38

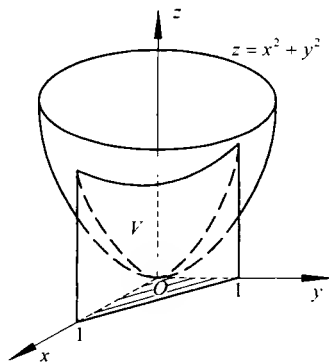


图 8.39

【4005】 试绘出一物体,其体积等于积分

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy.$$

解 积分域为三角形 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$.

柱体上顶为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$. 物体的形状如图 8.39 所示.

【4006】 绘出下列二重积分所表示的体积:

- (1) $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1, y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} (x+y) dx dy;$ (2) $\iint_{\substack{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} dx dy;$ (3) $\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy;$
 (4) $\iint_{x^2 + y^2 \leq x} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy;$ (5) $\iint_{\substack{1 \leq r \leq 2 \\ r \leq y \leq 2r}} \sqrt{xy} dx dy;$ (6) $\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sin \pi \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$

解 (1) 积分域为三角形 $0 \leq x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$. 柱体的上顶为平面 $z = x+y$ (图 8.40).

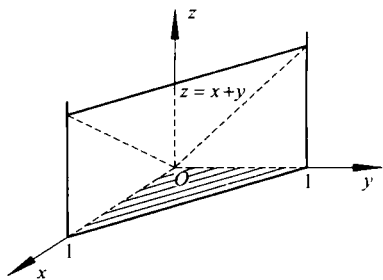


图 8.40

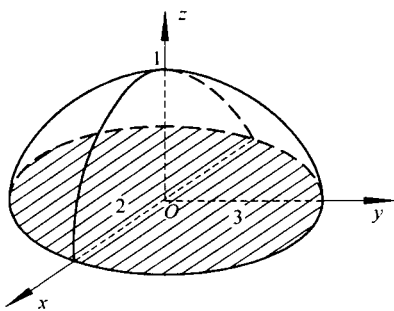


图 8.41

(2) 积分域为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$, 即立体的底面, 顶面为椭球面 $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$ (图 8.41).

(3) 积分域为由直线 $x+y=1, x+y=-1, x-y=1, y-x=1$ 围成的正方形. 柱体的顶面为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$. 图 8.42 仅画了第一卦限部分的体积.

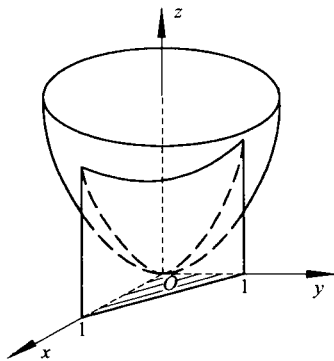


图 8.42

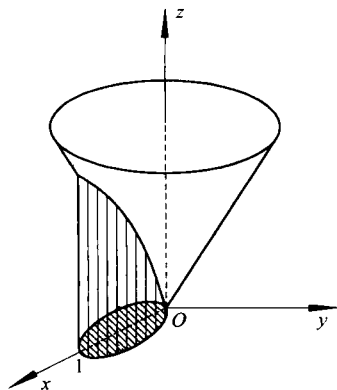


图 8.43

(4) 积分域为圆 $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$. 柱体的顶面为圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (图 8.43).

(5) 积分域为梯形 $1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2x$. 柱体的顶面为双曲抛物面 $z = \sqrt{xy}$ (图 8.44).

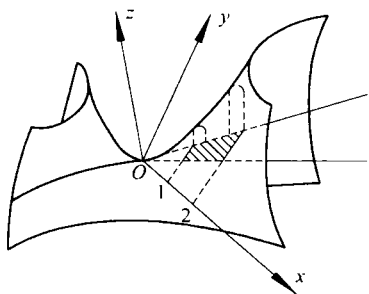


图 8.44

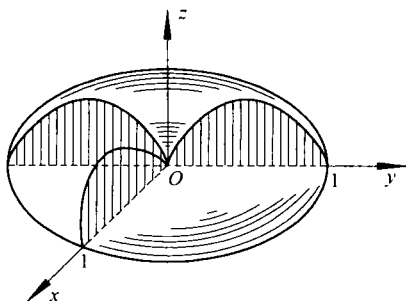


图 8.45

(6) 积分域为圆 $x^2 + y^2 \leq 1$, 即立体的底面, 顶面是由正弦曲线 $z = \sin \pi x$ 绕 Oz 轴旋转一周而得的旋转曲面(图 8.45).

求下列曲面所围区域的体积:

【4007】 $z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0$.

解 $V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1+x+y) dy = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{5}{6}$.

【4008】 $x + y + z = a, x^2 + y^2 = R^2, x = 0, y = 0, z = 0 (a \geq R\sqrt{2})$.

解 $V = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (a-x-y) dy = \int_0^R \left[(a-x) \sqrt{R^2-x^2} - \frac{R^2-x^2}{2} \right] dx$
 $= \int_0^R a \sqrt{R^2-x^2} dx - \int_0^R \left(x \sqrt{R^2-x^2} + \frac{R^2-x^2}{2} \right) dx = \frac{\pi a R^2}{4} - \frac{2R^3}{3}$.

【4009】 $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0$.

解 $V = \int_1^2 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy = \frac{88}{105}$.

【4010】 $z = \cos x \cos y, z = 0, |x + y| \leq \frac{\pi}{2}, |x - y| \leq \frac{\pi}{2}$.

提示 注意函数 $z = \cos x \cos y$ 的图像关于 Oyz 平面对称, 而积分域关于 Oy 轴对称.

解 因函数 $z = \cos x \cos y$ 的图像关于 Oyz 平面对称, 而积分域(图 8.46)关于 Oy 轴对称, 故所求的体积为

$$V = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos y dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = 4 \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

【4011】 $z = \sin \frac{\pi y}{2x}, z = 0, y = x, y = 0, x = \pi$.

解 $V = \int_0^\pi dx \int_0^x \sin \frac{\pi y}{2x} dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi$.

【4012】 $z = xy, x + y + z = 1, z = 0$.

提示 注意所求的体积 V 由两部分组成:

$$V_1: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1-x}{1+x}, z = xy.$$

$$V_2: 0 \leq x \leq 1, \frac{1-x}{1+x} \leq y \leq 1-x, z = 1-x-y.$$

解 体积 V 由两部分组成:

$$V_1: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1-x}{1+x}, z = xy.$$

$$V_2: 0 \leq x \leq 1, \frac{1-x}{1+x} \leq y \leq 1-x, z = 1-x-y.$$

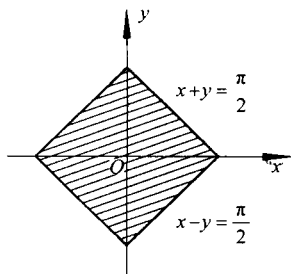


图 8.46

它们在 Oxy 平面上的投影域 Ω_1 及 Ω_2 如图 8.47 所示. 于是, 所求的体积为

$$V = V_1 + V_2 \\ = \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} y dy + \int_0^1 dx \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} (1-x-y) dy = \left(\frac{11}{4} + 4 \ln 2 \right) + \left(\frac{25}{6} - 6 \ln 2 \right) = \frac{17}{12} - 2 \ln 2.$$

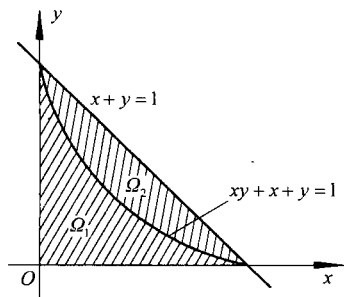


图 8.47

变换成极坐标, 求下列曲面所围区域的体积:

【4013】 $z^2 = xy, x^2 + y^2 = a^2$.

提示 注意对称性, 令 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 并利用 3856 题的结果.

解 因为 $z = \sqrt{xy}$, 故所求的体积为

$$V = 4 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq a^2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \sqrt{xy} dx dy = 4 \int_0^a dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \varphi \sin \varphi} r^2 d\varphi = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{2}} \varphi \sin^{\frac{1}{2}} \varphi d\varphi \\ = \frac{4}{3} a^3 \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3} a^3 \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2}{3} a^3 \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3} a^3 \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

*) 利用 3856 题的结果.

【4014】 $z = x + y, (x^2 + y^2)^2 = 2xy, z = 0 (x > 0, y > 0)$.

提示 令 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 并利用 3856 题的结果.

解 令 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 则方程 $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ 及 $z = x + y$ 变为

$$r^2 - 2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi \quad \text{及} \quad z = r(\cos \varphi + \sin \varphi).$$

于是, 所求的体积为

$$V = \iint_{\Omega} (x+y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} r^2 (\cos \varphi + \sin \varphi) dr = \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{\frac{5}{2}} \varphi \cos^{\frac{3}{2}} \varphi + \cos^{\frac{5}{2}} \varphi \sin^{\frac{3}{2}} \varphi) d\varphi \\ = \frac{2\sqrt{2}}{3} B\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2!} \\ = \frac{\sqrt{2}}{16} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}.$$

*) 利用 3856 题的结果.

【4015】 $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0$.

解 令 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 则方程 $x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x$ 及 $z = x^2 + y^2$ 变为

$$r = \cos \varphi, \quad r = 2 \cos \varphi \quad \text{及} \quad z = r^2.$$

于是, 所求的体积为

$$V = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} r^3 dr = \frac{2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (16 \cos^4 \varphi - \cos^4 \varphi) d\varphi = \frac{15}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi$$

$$= \frac{15}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{45}{32} \pi.$$

【4016】 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 \geq a|x|$ ($a > 0$).

解 只需计算由下列曲面所围区域的体积:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 \leq a|x|.$$

若引用极坐标, 则 $r^2 + z^2 = a^2$, $r^2 \leq a|r \cos \varphi|$, 其体积为

$$\begin{aligned} V_1 &= 8 \iint_{\substack{r^2 + z^2 \leq a^2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} dx dy - 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r \sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{8a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3} - \frac{16a^3}{9}. \end{aligned}$$

于是, 所求的体积为
$$V = \frac{4\pi a^3}{3} - \left(\frac{4\pi a^3}{3} - \frac{16a^3}{9} \right) = \frac{16a^3}{9}.$$

【4017】 $x^2 + y^2 - az = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $z = 0$ ($a > 0$).

解 若引用极坐标, 则有 $z = \frac{r^2}{a}$, $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ ($a > 0$).

于是, 利用对称性知, 所求的体积为

$$V = 4 \iint_D \frac{1}{a} (x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{a \cos 2\varphi}} \frac{r^2}{a} r dr = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{\pi a^3}{8}.$$

【4018】 $z = e^{-(x^2 + y^2)}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$.

解 利用对称性, 得所求的体积为

$$V = 4 \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq R^2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} e^{-(x^2 + y^2)} dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

【4019】 $z = c \cos \frac{\pi \sqrt{x^2 + y^2}}{2a}$, $x^2 + y^2 = a^2$, $y = x \tan \alpha$, $y = x \tan \beta$ ($a > 0, c > 0, 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$).

解 所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D c \cos \frac{\pi \sqrt{x^2 + y^2}}{2a} dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^a c r \cos \frac{\pi r}{2a} dr = c(\beta - \alpha) \left[\frac{2ar}{\pi} \sin \frac{\pi r}{2a} + \frac{4a^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi r}{2a} \right] \Big|_0^a \\ &= 2a^2 c (\beta - \alpha) \left(\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \right) - \frac{2a^2 c (\beta - \alpha) (\pi - 2)}{\pi^2}. \end{aligned}$$

【4020】 $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$.

提示 注意两曲面的交线在 Oxy 平面上的投影域的围线为圆

$$x^2 + y^2 = x + y \quad \text{或} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

故令 $x = \frac{1}{2} + r \cos \varphi$, $y = \frac{1}{2} + r \sin \varphi$, 则曲面方程化为

$$z = r^2 + \frac{1}{2} + r(\cos \varphi + \sin \varphi) \quad \text{及} \quad z = 1 + r(\cos \varphi + \sin \varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

解 立体的投影域的围线为 $x^2 + y^2 = x + y$ 或 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. 若引用代换 $x = \frac{1}{2} + r \cos \varphi$,

$y = \frac{1}{2} + r \sin \varphi$, 则有

$$z = r^2 + \frac{1}{2} + r(\cos \varphi + \sin \varphi), \quad z = 1 + r(\cos \varphi + \sin \varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

于是, 所求的体积为

$$V = \iint_{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}} [(x + y) - (x^2 + y^2)] dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ [1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)] - [r^2 + \frac{1}{2} + r(\cos\varphi+\sin\varphi)] \right\} r dr \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - r^2 \right) r dr = \frac{\pi}{8}.
 \end{aligned}$$

求下列曲面所围区域的体积(假定参数是正的):

【4021】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad (z > 0).$

提示 注意两曲面的交线在 Oxy 平面上的投影域的围线为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$, 故令 $x = a \cos\varphi, y = b \sin\varphi$, 则曲面方程化为

$$z = c \sqrt{1-r^2} \quad \text{及} \quad z = cr \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

解 两曲面的交线在 Oxy 平面上的投影为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$. 令 $x = a \cos\varphi, y = b \sin\varphi$, 则方程化为

$$z = c \sqrt{1-r^2} \quad \text{及} \quad z = cr \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

于是, 曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D \left[c \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)} - c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right] dx dy - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} ab r (c \sqrt{1-r^2} - cr) dr \\
 &= abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (r \sqrt{1-r^2} - r^2) dr = -\frac{1}{3} abc \int_0^{2\pi} \left[r^3 + (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right] \bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} d\varphi \\
 &= -\frac{1}{3} \pi abc (2 - \sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

【4022】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

提示 令 $x = a \cos\varphi, y = b \sin\varphi$, 则曲面方程化为

$$z = \pm c \sqrt{1+r^2} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1).$$

解 若令 $x = a \cos\varphi, y = b \sin\varphi$, 则曲面方程化为

$$z = \pm c \sqrt{1+r^2} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1).$$

于是, 曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} 2c \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2abcr \sqrt{1+r^2} dr - 2abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \sqrt{1+r^2} dr \\
 &= \frac{4\pi}{3} abc (2\sqrt{2} - 1).
 \end{aligned}$$

【4023】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, z = 0.$

提示 注意立体在 Oxy 平面上的投影域的围线为椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad \text{或} \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2},$$

故令 $\frac{x}{a} = \frac{1}{2} + r \cos\varphi, \frac{y}{b} = \frac{1}{2} + r \sin\varphi$, 则曲面方程化为

$$z = c \left[\frac{1}{2} + r(\cos\varphi + \sin\varphi) + r^2 \right] \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

解 立体在 Oxy 平面上的投影域的围线为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, 即 $\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$.

若令 $\frac{x}{a} = \frac{1}{2} + r\cos\varphi$, $\frac{y}{b} = \frac{1}{2} + r\sin\varphi$, 则曲面方程化为

$$z = c \left[\frac{1}{2} + r(\cos\varphi + \sin\varphi) + r^2 \right] \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

于是, 曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}} c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r \left[\frac{1}{2} + r(\cos\varphi + \sin\varphi) + r^2 \right] dr \\ &= abc \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{6\sqrt{2}}(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{16} \right] d\varphi = abc \frac{3 \cdot 2\pi}{16} = \frac{3}{8} \pi abc. \end{aligned}$$

【4024】 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0.$

提示 令 $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, 则曲面方程化为

$$z = c(1 - r^2) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1).$$

解 若令 $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, 则曲面方程化为

$$z = c(1 - r^2) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1).$$

于是, 曲面所围区域的体积为

$$V = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} c \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right] dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abc r (1 - r^2) dr = \frac{2}{3} \pi abc.$$

【4025】 $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

提示 计算位于第一卦限(即 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$)部分的体积. 令 $x = a\cos^2\varphi$, $y = b\sin^2\varphi$, 则曲面方程化为

$$z = c \sqrt{1 - r^2} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1).$$

解 下面计算位于第一卦限部分的体积. 令 $x = a\cos^2\varphi$, $y = b\sin^2\varphi$, 则曲面方程化为

$$z = c \sqrt{1 - r^2} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1).$$

于是, 曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1} c \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 abc \sin 2\varphi \sqrt{1 - r^2} r dr \\ &= abc \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \right) \left(\int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr \right) = \frac{abc}{3}. \end{aligned}$$

【4026】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$

解 令 $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, 则方程化为

$$z = \pm c \sqrt{1 - r^2}, \quad r^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$$

(因 $r^2 = \cos 2\varphi \geq 0$, 故 $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$). 于是, 利用对称性知, 曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned} V &= 8c \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = 8abc \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{1 - r^2} r dr d\varphi \\ &= 8abc \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{3} (1 - \sqrt{8} \sin^3 \varphi) d\varphi = \frac{8abc}{3} \left(\varphi + \sqrt{8} \cos \varphi - \frac{\sqrt{8}}{3} \cos^3 \varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\ &= \frac{8abc}{3} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{2abc}{9} (3\pi + 20 - 16\sqrt{2}). \end{aligned}$$

【4027】 $z^2 = xy, x+y=a, x+y=b (0 < a < b)$.

解 由于 $z = \pm \sqrt{xy}$, 又所围立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由直线 $x+y=a, x+y=b, x=0$ 及 $y=0$ 围成. 利用对称性知, 曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_{\Omega} \sqrt{xy} \, dx dy = 2 \left(\int_0^a dx \int_{a-x}^b \sqrt{xy} \, dy + \int_a^b dx \int_0^{b-x} \sqrt{xy} \, dy \right) \\ &= \frac{4}{3} \int_0^a \left[\sqrt{x(b-x)^3} - \sqrt{x(a-x)^3} \right] dx + \frac{4}{3} \int_a^b \sqrt{x(b-x)^3} dx \\ &= \frac{4}{3} \int_0^b (b-x) \sqrt{x(b-x)} dx - \frac{4}{3} \int_0^a (a-x) \sqrt{x(a-x)} dx. \end{aligned}$$

令 $x = b \sin^2 t$, 可得

$$\begin{aligned} \int_0^b (b-x) \sqrt{x(b-x)} dx &= 2b^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t dt \\ &= 2b^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t dt \right) = 2b^3 \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{1}{16} \pi b^3; \end{aligned}$$

同理, 有

$$\int_0^a (a-x) \sqrt{x(a-x)} dx = \frac{1}{16} \pi a^3.$$

于是, 所求的体积为

$$V = \frac{4}{3} \left(\frac{\pi b^3}{16} - \frac{\pi a^3}{16} \right) = \frac{\pi}{12} (b^3 - a^3).$$

【4028】 $z = x^2 + y^2, xy = a^2, xy = 2a^2, y = \frac{x}{2}, y = 2x, z = 0$.

提示 注意曲面所围区域的立体在 Oxy 平面上的投影域由曲线 $xy = a^2, xy = 2a^2$ 及直线 $y = \frac{x}{2}, y = 2x$ 围成, 故令 $xy = ua^2, y = vx$, 则积分域变为长方形域

$$1 \leq u \leq 2, \frac{1}{2} \leq v \leq 2, \text{ 且 } |I| = \frac{a^2}{2v}, z = x^2 + y^2 = a^2 \left(\frac{u}{v} + uv \right).$$

再利用对称性.

解 曲面所围的立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由曲线 $xy = a^2, xy = 2a^2$ 和直线 $y = \frac{x}{2}, y = 2x$ 围成.

利用对称性知, 曲面所围区域的体积为 $V = 2 \iint_{\Omega} z dx dy = 2 \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$.

作变量代换 $xy = ua^2, y = vx$, 则积分域变为长方形域 $1 \leq u \leq 2, \frac{1}{2} \leq v \leq 2$, 且 $|I| = \frac{a^2}{2v}, z = x^2 + y^2 = a^2 \left(\frac{u}{v} + uv \right)$.

于是, 所求的体积为

$$V = 2 \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy = 2 \iint_{\substack{1 \leq u \leq 2 \\ \frac{1}{2} \leq v \leq 2}} a^2 \left(\frac{u}{v} + uv \right) \frac{a^2}{2v} du dv = a^4 \int_1^2 u du \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) dv = \frac{9}{2} a^4.$$

【4029】 $z = xy, x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x, y^2 = 2x, z = 0$.

提示 仿 4028 题, 令 $x = uy^2, y = vx^2$, 则积分域 Ω 变为正方形域 $\frac{1}{2} \leq u \leq 1, \frac{1}{2} \leq v \leq 1$, 且 $|I| = \frac{1}{3} u^{-1} v^{-2}$.

解 曲面所围区域的立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由曲线 $x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x$ 及 $y^2 = 2x$ 围成. 我们有

$$V = \iint_{\Omega} z dx dy = \iint_{\Omega} xy dx dy.$$

作变量代换

$$x=uy^2, \quad y=vx^3, \quad \text{或} \quad x=u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}, \quad y=u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}},$$

则积分域 Ω 变为正方形域 $\frac{1}{2} \leq u \leq 1, \frac{1}{2} \leq v \leq 1$, 且 $|I| = \frac{1}{3} u^2 v^2$. 于是, 曲面所围区域的体积为

$$V = \iint_{\Omega} xy dx dy = \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 u^{-3} v^{-3} du dv = \frac{1}{3} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 u^{-3} du \right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

【4030】 $z = c \sin \frac{\pi xy}{a^2}, \quad z=0, \quad xy=a^2, \quad y=\alpha x, \quad y=\beta x \quad (0 < \alpha < \beta; x > 0).$

解 曲面所界的立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由曲线 $xy=a^2$ 和直线 $y=\alpha x, y=\beta x \quad (x > 0)$ 围成. 于是, 曲面所围区域的体积为

$$V = \iint_{\Omega} z dx dy = c \iint_{\Omega} \sin \frac{\pi xy}{a^2} dx dy.$$

作变量代换 $x = \arccos \varphi, y = a \sin \varphi$, 则 $|I| = a^2 r$. 于是,

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} z dx dy = c \iint_{\Omega} \sin \frac{\pi xy}{a^2} dx dy = a^2 c \int_{\arctan \alpha}^{\arctan \beta} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\sin \varphi \cos \varphi}}} \sin(\pi r^2 \sin \varphi \cos \varphi) r dr d\varphi \\ &= \frac{a^2 c}{\pi} \int_{\arctan \alpha}^{\arctan \beta} \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} d\varphi = \frac{a^2 c}{\pi} \ln \tan \varphi \Big|_{\arctan \alpha}^{\arctan \beta} = \frac{a^2 c}{\pi} \ln \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

【4031】 $z = x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}, \quad z=0, \quad x+y=1, \quad x=0, \quad y=0.$

解 曲面所界的立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由直线 $x+y=1, x=0, y=0$ 围成. 于是, 曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} z dx dy = \iint_{\Omega} (x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}) dx dy = \int_0^1 \left[x^{\frac{3}{2}}(1-x) + \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} \right] dx \\ &= \frac{5}{2} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 - \frac{7}{2} x^{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 - \frac{4}{35} (1-x)^{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{4}{35} = \frac{8}{35}. \end{aligned}$$

【4032】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z}{c} = 1, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad z=0.$

提示 令 $x = a \cos^3 \varphi, y = b \sin^3 \varphi$, 则曲面方程化为

$$z = c[1 - r^2(\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi)], \quad r=1 \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1),$$

注意对称性, 并利用 3856 题的结果.

解 令 $x = a \cos^3 \varphi, y = b \sin^3 \varphi$, 则方程化为

$$z = c[1 - r^2(\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi)], \quad r=1 \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1).$$

于是, 利用对称性知, 曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_{\Omega} z dx dy = 12abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 [1 - r^2(\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi)] r \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi dr d\varphi \\ &= 12abc \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \right) \\ &= 6abc \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \right) \\ &= 6abc \left[\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{10} \cdot \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{3\pi abc}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{105}{1920} \right) = \frac{75}{256} \pi abc. \end{aligned}$$

【4033】 $z = \arctan \frac{y}{x}, \quad z=0, \quad \sqrt{x^2+y^2} = a \arctan \frac{y}{x} \quad (y \geq 0).$

解 令 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 则方程化为 $z = c\varphi, r = a\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$, 于是, 曲面所围区域的体积为

$$V = \iint_{\Omega} z dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\varphi} c\varphi r dr d\varphi = \frac{a^2 c}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^3 d\varphi = \frac{a^2 c}{8} \varphi^4 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^4 a^2 c}{128}.$$

【4034】 $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, x=0, y=0, z=0 (n>0)$

提示 令 $x = a \cos^{\frac{2}{n}} \varphi, y = b \sin^{\frac{2}{n}} \varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$, 则曲面方程化为

$$z = c \sqrt[n]{1 - r^n} \quad (0 \leq r \leq 1).$$

在求体积 V 的过程中, 先后令 $r^n = t$ 及 $\sin^2 \varphi = z$, 并利用 B 函数的定义及计算公式.

解 曲面方程可表示为

$$z = c \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} \right)}.$$

若令 $x = a \cos^{\frac{2}{n}} \varphi, y = b \sin^{\frac{2}{n}} \varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$, 则曲所围区域的体积为

$$V = c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} \right)} dx dy = \frac{2abc}{n} \int_0^1 \sqrt[n]{1 - r^n} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi.$$

若令 $r^n = t$ 可得

$$\int_0^1 \sqrt[n]{1 - r^n} r dr = \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{n}-1} t^{\frac{2}{n}-1} dt = B\left(\frac{1}{n}+1, \frac{2}{n}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)};$$

令 $\sin^2 \varphi = t$ 可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2n} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{n}-1} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{1}{2n} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

于是, 所求的体积为

$$V = \frac{abc}{n^2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} = \frac{abc}{3n^2} \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

【4035】 $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1, x=0, y=0, z=0 (n>0, m>0).$

提示 令 $x = a \cos^2 \varphi, y = b \sin^2 \varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$.

解 令 $x = a \cos^2 \varphi, y = b \sin^2 \varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$, 则曲面所围区域的体积为

$$\begin{aligned} V &= c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)} dx dy = 2abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - r^2} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = abc \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr \\ &= \frac{abc}{n} B\left(\frac{1}{m}+1, \frac{2}{n}\right) = \frac{abc}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}+1\right)} = \frac{abc}{n+2m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)}. \end{aligned}$$

§ 4. 曲面面积的计算法

1° 曲面由显函数给出的情形 光滑曲面 $z = z(x, y)$ 的面积由以下积分表示:

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

其中 Ω 为该曲面在 Oxy 平面上的投影.

2° 曲面由参数方程给出的情形 若曲面是由参数方程给出的:

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v),$$

其中 $(u, v) \in \Omega$, Ω 为封闭可求积的有限区域, 且函数 x, y 和 z 在区域 Ω 内连续可微, 则对于曲面的面积有公式

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} \, du dv,$$

其中

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \quad F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

【4036】 求曲面 $az - xy$ 包含在圆柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 内那部分的面积.

解 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \, dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{\frac{a^2 + (x^2 + y^2)}{a^2}} \, dx dy \\ &= \frac{1}{a} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 + (x^2 + y^2)} \, dx dy = \frac{4}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r \sqrt{a^2 + r^2} \, dr = \frac{2\pi a^2}{3} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

【4037】 求以曲面 $x^2 + z^2 = a^2$ 和 $y^2 + z^2 = a^2$ 为界的物体的表面积.

解 如图 8.48 所示, 两曲面的交线在 Oyz 平面上的投影为圆 $y^2 + z^2 = a^2, x=0$.

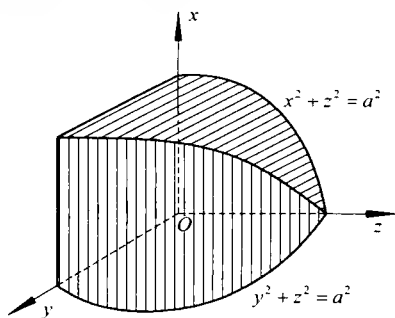


图 8.48

于是, 利用对称性知, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= 4 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} \, dy dz = 4 \cdot 4 \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \sqrt{1 + 0^2 + \left(-\frac{z}{x}\right)^2} \, dy \\ &= 16 \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \sqrt{\frac{x^2 + z^2}{x^2}} \, dy = 16a \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - z^2}} \\ &= 16a \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}} \sqrt{a^2 - z^2} \, dz = 16a^2. \end{aligned}$$

【4038】 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 包含在柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b \leq a$) 内那部分的面积.

解 因为 $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$

又积分域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ 位于第一象限部分为

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

于是, 利用对称性知, 所求的面积为

$$S = 2 \cdot 4 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dy = 8a \int_0^a \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}.$$

【4039】 求曲面 $z^2 = 2xy$ 被平面 $x + y = 1, x=0, y=0$ 所截部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x+y}{\sqrt{xy}}.$$

于是,所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{x+y}{\sqrt{xy}} dy = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left[2\sqrt{x(1-x)} + \frac{2}{3\sqrt{x}}(1-x)\sqrt{1-x} \right] dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{2\sqrt{1-x}(1+2x)}{3\sqrt{x}} dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_0^1 \sqrt{1-x}(1+2x)d(\sqrt{x}) \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_0^1 \sqrt{1-t^2}(1+2t^2)dt = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

【4040】 求曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在圆柱 $x^2+y^2=\pm ax$ 内那部分的面积(维维亚尼问题).

解 只须求出球面被圆柱面割出部分的面积. 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

于是,利用对称性知,割出部分的面积为

$$S=8 \iint_{\Omega} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx dy = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}} dr = 8a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

于是,所求的面积为 $A-4\pi a^2-S-4\pi a^2=8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-8a^2$.

【4041】 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内那部分的面积.

解 注意到 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=\sqrt{2}$,

又积分域为: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\cos\varphi$. 于是,所求的面积为

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \sqrt{2} r dr = 2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = \sqrt{2}\pi.$$

【4042】 求曲面 $z=\sqrt{x^2-y^2}$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 内那部分的面积.

解 注意到 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}}$,

又积分域由双纽线 $r^2=a^2\cos 2\varphi$ 所围成. 于是,利用对称性知,所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\Omega} \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}} dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{2}r \frac{r\cos\varphi}{r\sqrt{\cos 2\varphi}} dr = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos\varphi \sqrt{\cos 2\varphi} d\varphi \\ &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-2\sin^2\varphi} d(\sqrt{2}\sin\varphi) = 2a^2 \left[\frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{2} \sqrt{1-2\sin^2\varphi} + \frac{1}{2} \arcsin(\sqrt{2}\sin\varphi) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

【4043】 求曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ 被平面 $x-y=\pm 1, x+y=\pm 1$ 所截部分的面积.

解 因为 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}$, 故所求的面积为

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy,$$

其中 Ω 为由直线 $x-y=\pm 1, x+y=\pm 1$ 围成的正方形域. 为便于计算,作变换

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v,$$

从而积分域变为由方程 $u = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, v = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 围成的正方形, 且 $I=1$. 于是, 注意利用对称性, 即得所求的面

积为

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy = 4 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} du \int_u^{\sqrt{2}-u} \sqrt{1+u^2+v^2} dv \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left\{ u \sqrt{1+2u^2} + \frac{1+u^2}{2} [\ln(\sqrt{1+2u^2}+u) - \ln(\sqrt{1+2u^2}-u)] \right\} du \\
 &\quad - \frac{2}{3} (1+2u^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} [\ln(\sqrt{1+2u^2}+u) - \ln(\sqrt{1+2u^2}-u)] d\left(u + \frac{u^3}{3}\right) \\
 &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} \ln 3 - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 4 \left(u + \frac{u^3}{3}\right) \frac{du}{\sqrt{1+2u^2}(1+u^2)} \\
 &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} \ln 3 - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1 + \frac{u^4}{3}}{1+u^2} \frac{d(1+2u^2)}{\sqrt{1+2u^2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} \ln 3 - \frac{2}{3} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2+5}{t^2+1} dt \\
 &\quad \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} \ln 3 - \frac{2}{3} (\sqrt{2}-1) - \frac{8}{3} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2+1} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 + \frac{7}{4} \ln 3\right) + \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{3} \arctan \sqrt{2} \\
 &= -\frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 + \frac{7\ln 3}{4}\right) + \frac{8}{3} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

*) 作代换 $1+2u^2=t^2$.

【4044】 求曲面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 内那部分的面积.

解 注意到 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2+(x^2+y^2)}$,

又积分域由双纽线 $r^2=a^2 \sin 2\varphi$ 围成. 于是, 利用对称性, 即得所求的面积为

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_D \frac{1}{a} \sqrt{a^2+(x^2+y^2)} dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} \frac{1}{a} \sqrt{a^2+r^2} r dr \\
 &= \frac{4}{3a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [a^3(1+\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} - a^3] d\varphi = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\sin 2\varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi - \frac{\pi a^2}{3}.
 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\sin 2\varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [1+\cos 2(\frac{\pi}{4}-\varphi)]^{\frac{1}{2}} d\varphi = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right) d\varphi \\
 &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 t dt = 2\sqrt{2} \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{3},
 \end{aligned}$$

故最后得

$$S = \frac{4a^2}{3} \cdot \frac{5}{3} - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{a^2}{9} (20-3\pi).$$

【4045】 求曲面 $x^2+y^2=a^2$ 被平面 $x+z=0, x-z=0$ ($x>0, y>0$) 所截部分的面积.

解 因为 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

于是, 所求的面积为 $S = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dx dz = \int_0^a dx \int_{-x}^x \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dz = \int_0^a \frac{2ax}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = 2a^2$.

【4046】 求以曲面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$ 和 $x+y+z=2a$ ($a>0$) 为界的物体的表面积和体积.

解 曲面的交线在 Oxy 平面上的投影为

$$3x^2+3y^2-(2a-x-y)^2,$$

即

$$x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2.$$

令 $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$, 则方程变为 $\frac{\left(x'+\frac{4a}{\sqrt{2}}\right)^2}{(2\sqrt{3}a)^2} + \frac{y'^2}{(2a)^2} = 1$.

由此可见, 曲面所界的物体在 Oxy 平面上的投影域为以 $2a$ 为短半轴、 $2\sqrt{3}a$ 为长半轴的椭圆.

物体的表面积由截面和截出的锥面两部分组成. 对于 $z = 2a - x - y$, $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ 分别有

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = 2.$$

于是, 物体的表面积 $S = \iint_D \sqrt{3} dx dy + \iint_D 2 dx dy = (\sqrt{3} + 2) \cdot \pi \cdot 2a \cdot 2\sqrt{3}a = 4\pi(3 + 2\sqrt{3})a^2$.

又所截圆锥之高为 $H = \left| \frac{-2a}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \right| = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

(即坐标原点到平面 $x + y + z = 2a$ 的距离). 于是, 物体的体积为

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}},$$

其中 A 为截圆锥的底面积: $A = \iint_D \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \cdot \pi \cdot 2a \cdot 2\sqrt{3}a = 12\pi a^2$.

因此, 所求物体的体积为 $V = \frac{1}{3} \cdot 12\pi a^2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}\pi a^3$.

【4047】 求球面在两条纬线和两条经线之间那部分的面积.

解题思路 球面的参数方程为

$$x = R \cos \varphi \cos \psi, \quad y = R \sin \varphi \cos \psi, \quad z = R \sin \psi,$$

其中 R 为球的半径. $\sqrt{EG - F^2} = R^2 \cos \psi$, 又 $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $\psi_1 \leq \psi \leq \psi_2$, 其中 φ_1 及 φ_2 为经线的经度, ψ_1 及 ψ_2 为纬线的纬度.

解 球面的参数方程为 $x = R \cos \varphi \cos \psi$, $y = R \sin \varphi \cos \psi$, $z = R \sin \psi$,

其中 R 为球的半径. 因为

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \psi + R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi = R^2 \cos^2 \psi,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 = R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \psi + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi + R^2 \cos^2 \psi = R^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \psi} = R^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi \sin \psi - R^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi \cos \psi + 0 = 0,$$

故 $\sqrt{EG - F^2} = R^2 \cos \psi$. 于是, 所求的面积为

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} R^2 \cos \psi d\psi = (\varphi_2 - \varphi_1)(\sin \psi_2 - \sin \psi_1)R^2,$$

其中 φ_1 及 φ_2 为经线的经度, ψ_1 及 ψ_2 为纬线的纬度.

【4048】 求螺旋面 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = h\varphi$ 在 $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$ 那部分的面积.

解 因为

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2 + h^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0,$$

故 $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{r^2 + h^2}$. 于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{r^2 + h^2} dr = 2\pi \left[\frac{r}{2} \sqrt{r^2 + h^2} + \frac{h^2}{2} \ln(r + \sqrt{r^2 + h^2}) \right] \Big|_0^a \\ &= \pi a \sqrt{a^2 + h^2} + \pi h^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}. \end{aligned}$$

【4049】 求环面 $x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi$, $y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi$, $z = a \sin \psi$ ($0 < a \leq b$)

在两条经线 $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ 和两条纬线 $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$ 之间那部分的面积. 整个环的表面积等于什么?

解 因为

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = (b + a \cos \psi)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 = a^2, \quad F = \frac{\partial x \partial x}{\partial \varphi \partial \psi} + \frac{\partial y \partial y}{\partial \varphi \partial \psi} + \frac{\partial z \partial z}{\partial \varphi \partial \psi} = 0$$

故 $\sqrt{EG - F^2} = a(b + a \cos \psi)$. 于是, 所求的面积为

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} a(b + a \cos \psi) d\psi = a(\varphi_2 - \varphi_1) [b(\psi_2 - \psi_1) + a(\sin \psi_2 - \sin \psi_1)].$$

整个环的表面积为 $A = \int_{-\pi}^{2\pi} d\varphi \int_{\pi}^{\pi} a(b + a \cos \psi) d\psi = 4\pi^2 ab$.

【4050】 求矩形 $x=a>0, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ 对坐标原点的立体角 ω . 若 a 很大, 推出 ω 的近似公式.

解 以原点为球心作单位球, 则 ω 即为该球面含于四面体 $O-ABCD$ 内的面积, 其中 $ABCD$ 是以 b, c 为边长的矩形 (图 8.49).

取球坐标系, 由 4047 题知: $\sqrt{EG - F^2} = \cos \varphi$,

又 φ 和 ψ 的变化域为

$$0 \leq \varphi \leq \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad 0 \leq \psi \leq \arcsin \frac{c \cos \varphi}{\sqrt{a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}}.$$

于是, 立体角

$$\begin{aligned} \omega &= \int_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}} d\varphi \int_0^{\arcsin \frac{c \cos \varphi}{\sqrt{a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}}} \cos \psi d\psi = \int_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \frac{c \cos \varphi}{\sqrt{a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}} d\varphi \\ &= \int_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \frac{d\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \sin \varphi\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \sin \varphi\right)^2}} \\ &= \arcsin \left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \sin \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \arcsin \frac{bc}{\sqrt{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)}}. \end{aligned}$$

当 a 很大时, 有 $\frac{bc}{\sqrt{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)}} = \frac{bc}{a^2 \sqrt{\left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right)\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}} \approx \frac{bc}{a^2}$,

于是, 得 ω 的近似公式 $\omega \approx \frac{bc}{a^2}$.

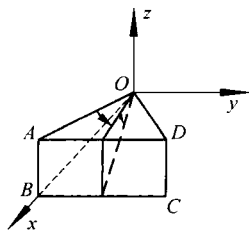


图 8.49

§ 5. 二重积分在力学上的应用

1° 质心 若薄板 Ω 位于平面 Oxy 内, x_0, y_0 为其质心坐标, $\rho = \rho(x, y)$ 为其面密度, 则

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho x dx dy, \quad y_0 = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho y dx dy, \quad (1)$$

其中 $M = \iint_{\Omega} \rho dx dy$ 为薄板的质量.

若薄板是均质的, 则在公式(1)中应令 $\rho = 1$.

2° 转动惯量 I_x 和 I_y 分别为平面 Oxy 内薄板 Ω 对坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量, 可表示为以下公式:

$$I_x = \iint_{\Omega} \rho y^2 dx dy, \quad I_y = \iint_{\Omega} \rho x^2 dx dy, \quad (2)$$

其中 $\rho = \rho(x, y)$ 为薄板的面密度.

还可研究惯性积 $I_{xy} = \iint_{\Omega} \rho xy dx dy$.

在公式(2)中取 $\rho = 1$, 我们就得到平面图形的几何转动惯量.

【4051】 求边长为 a 的正方形薄板的质量, 设薄板上每一点的面密度与该点到正方形顶点 O 的距离成正比, 且在正方形的中心等于 ρ_0 .

解 取坐标系如图 8.50 所示, 则面密度 $\rho = k\sqrt{x^2 + y^2}$. 由于

$$\rho_0 = k\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

故 $k = \frac{\rho_0}{a}\sqrt{2}$. 从而, $\rho = \frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$.

若引用极坐标, 即得质量

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \frac{\rho_0\sqrt{2}}{a} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}} r^2 dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} r^2 dr \right] \\ &= \frac{\rho_0 a^2}{3} \sqrt{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi} \right] = \frac{\rho_0 a^2}{3} 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} \\ &= \frac{\rho_0 a^2}{3} 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} d(\tan \varphi) \\ &= \frac{\rho_0 a^2}{3} 2\sqrt{2} \left[\frac{\tan \varphi}{2} \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} + \frac{1}{2} \ln |\tan \varphi + \sqrt{1 + \tan^2 \varphi}| \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\rho_0 a^2}{3} [2 + \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2})]. \end{aligned}$$

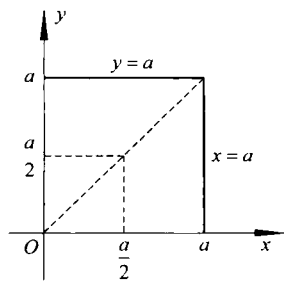


图 8.50

求以下列曲线为界的均匀薄板的质心坐标:

【4052】 $ay = x^2$, $x + y = 2a$ ($a > 0$).

解 面密度 ρ 为常数. 积分域如图 8.51 所示. 质量

$$M = \rho \int_{-2a}^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \frac{9}{2} \rho a^2.$$

对于坐标轴的一次矩为

$$M_y = \rho \int_{-2a}^a x dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \frac{9}{4} \rho a^3,$$

$$M_x = \rho \int_{-2a}^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} y dy = \frac{36}{5} \rho a^3.$$

于是, 质心 (x_0, y_0) 为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = -\frac{a}{2}, \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{8}{5}a.$$

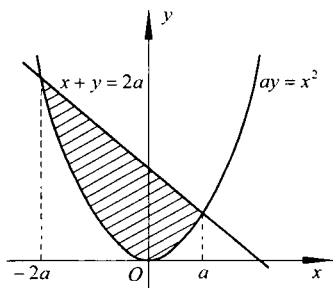


图 8.51

【4053】 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$.

解 质量和对 Oy 轴的一次矩分别为

$$M = \rho \int_0^a dx \int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} dy = \frac{1}{6} \rho a^2, \quad M_y = \rho \int_0^a x dx \int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} dy = \frac{1}{30} \rho a^3.$$

于是, 质心的横坐标为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{a}{5}.$$

由关于直线 $y = x$ 的对称性知, $x_0 = y_0 = \frac{a}{5}$.

【4054】 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($x > 0, y > 0$).

解 质量和对 Oy 轴的一次矩分别为

$$\begin{aligned} M &= \rho \int_0^a dx \int_0^{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} dy = \rho \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx = 3a^2 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt = 3a^2 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt \\ &= 3a^2 \rho \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2 \rho}{32}, \end{aligned}$$

$$M_y = \rho \int_0^a x dx \int_0^{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} dy = \rho \int_0^a x (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx = 3a^3 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^5 t dt = \frac{8a^3 \rho}{105}.$$

于是,质心的横坐标为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{256a}{315\pi}.$$

由关于直线 $y=x$ 的对称性知, $x_0 = y_0 = \frac{256a}{315\pi}$.

*) 作代换 $x - a\cos^3 t$.

【4055】 $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 - \frac{xy}{c^2}$ (线圈).

解 此曲线在第一象限部分是一封闭曲线,围成一图形 Ω . 作变量代换

$$x = \frac{a^2 b}{c^2} r \cos^4 \theta \sin^2 \theta, \quad y = \frac{ab^2}{c^2} r \cos^2 \theta \sin^4 \theta, \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

则原曲线方程变为 $r=1$. 又容易算得

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \frac{2a^3 b^3}{c^4} r (\sin^5 \theta \cos^7 \theta + \sin^7 \theta \cos^5 \theta),$$

故(利用 3856 题的结果)

$$M = \iint_{\Omega} \rho dx dy = \frac{2a^3 b^3}{c^4} \rho \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 \theta \cos^7 \theta + \sin^7 \theta \cos^5 \theta) d\theta = \frac{a^3 b^3}{c^4} \rho \left[\frac{1}{2} B(3, 4) + \frac{1}{2} B(4, 3) \right] = \frac{a^3 b^3}{c^4} \rho B(3, 4),$$

$$M_y = \iint_{\Omega} \rho x dx dy = \frac{2a^3 b^4}{c^6} \rho \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sin^2 \theta (\sin^5 \theta \cos^7 \theta + \sin^7 \theta \cos^5 \theta) d\theta$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3 b^4}{c^6} \rho \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 \theta \cos^{11} \theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 \theta \cos^9 \theta d\theta \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3 b^4}{c^6} \rho [B(4, 6) + B(5, 5)].$$

于是,

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{a^2 b}{3c^2} \frac{B(4, 6) + B(5, 5)}{B(3, 4)}.$$

由于 $B(4, 6) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(6)}{\Gamma(10)} = \frac{3! \cdot 5!}{9!}$, $B(5, 5) = \frac{[\Gamma(5)]^2}{\Gamma(10)} = \frac{(4!)^2}{9!}$, $B(3, 4) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)} = \frac{2! \cdot 3!}{6!}$,

代入,化简得

$$x_0 = \frac{a^2 b}{3c^2} \cdot \frac{6! [3! \cdot 5! + (4!)^2]}{2! \cdot 3! \cdot 9!} = \frac{a^2 b}{14c^2}.$$

同理,可求得质心的纵坐标为

$$y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_{\Omega} \rho y dx dy}{\iint_{\Omega} \rho dx dy} = \frac{ab^2}{14c^2}.$$

【4056】 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ ($x > 0, y > 0$).

解 曲线的极坐标方程为 $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$, 质量和对 Oy 轴的一次矩分别为

$$M = \iint_{\Omega} \rho dx dy = \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr = \frac{\rho a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{\rho a^2}{2},$$

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_{\Omega} \rho x dx dy = \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r \cdot r \cos \varphi dr = \frac{\rho a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin^{\frac{3}{2}} 2\varphi d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{5}{2}} \varphi \sin^{\frac{1}{2}} \varphi d\varphi \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho a^3 \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho a^3 \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{2\Gamma(3)} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho a^3 \frac{\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \rho a^3 \frac{\pi}{2\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16} \pi \rho a^3. \end{aligned}$$

于是,质心的横坐标为 $x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{\pi a}{8}$. 由关于直线 $y=x$ 的对称性知, $x_0 = y_0 = \frac{\pi a}{8}$.

*) 利用 3856 题的结果.

【4057】 $r = a(1 + \cos \varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$.

解 质量和对 Oy 轴、 Ox 轴的一次矩分别为

$$M = \rho \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r dr = \frac{1}{2} \rho a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{4} \pi \rho a^2,$$

$$M_y = \rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r \cdot r \cos\varphi dr = \frac{\rho a^3}{3} \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3 \cos\varphi d\varphi = \frac{\rho a^3}{3} \left[\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3 d\varphi - \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3 d\varphi \right]$$

$$\frac{\rho a^3}{3} \left[32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 t dt - 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t dt \right] = \frac{\rho a^3}{3} \left[32 \cdot \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} - 16 \cdot \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{5\pi\rho a^3}{8}.$$

$$M_z = \rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r \cdot r \sin\varphi dr = \frac{\rho a^3}{3} \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi = \frac{\rho a^3}{3} \cdot \frac{(1+\cos\varphi)^3}{4} \Big|_0^\pi = -\frac{4\rho a^3}{3}.$$

于是,质心的坐标为 $x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{5}{6}a$, $y_0 = \frac{M_z}{M} = \frac{16}{9\pi}a$.

【4058】 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), $y' \neq 0$.

解 质量和对 Ox 轴的一次矩分别为

$$M = \rho \int_0^{2\pi a} dx \int_0^y dy = \rho \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi\rho a^2.$$

$$M_x = \rho \int_0^{2\pi a} dx \int_0^y y dy = \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} y^2 dx = \frac{1}{2} \rho a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \frac{5}{2} \pi \rho a^3.$$

于是,质心的纵坐标为 $y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{5}{6}a$.

由对称性知, $x_0 = \pi a$.

【4059】 求圆形薄板 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 的质心坐标. 设它在点 $M(x, y)$ 的面密度与点 M 到点 $A(a, 0)$ 的距离成正比.

解 按题设,面密度 $\rho = k \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ (k 为常数). 于是,质量为

$$M = \int_a^a dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} k \sqrt{(x-a)^2 + y^2} dy$$

$$= k \int_a^a \left[y \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x-a)^2 \ln(y + \sqrt{(x-a)^2 + y^2}) \right] \Big|_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= k \int_a^a \sqrt{2a(a-x)} \sqrt{a+x} dx + k \int_a^a \left[\frac{1}{2} \ln(a-x) \right] (a-x)^2 dx + k \int_a^a (a-x)^2 \ln(\sqrt{a+x} + \sqrt{2a}) dx$$

$$= I_1 - I_2 + I_3.$$

由于

$$I_1 = k \int_a^a \sqrt{2a} [-(a+x)^{\frac{3}{2}} + 2a(x+a)^{\frac{1}{2}}] dx = \sqrt{2a} k \left[-\frac{2}{5}(a+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{4a}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_a^a = \frac{32}{15} ka^3,$$

$$I_2 = \frac{k}{2} \int_0^{2a} t^2 \ln t dt = \frac{k}{6} t^3 \ln t \Big|_0^{2a} - \frac{k}{6} \int_0^{2a} t^3 \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{4}{3} ka^3 \ln 2a - \frac{4}{9} ka^3,$$

$$I_3 = k \cdot 2 \int_0^{\sqrt{2a}} t(2a-t^2)^2 \ln(t + \sqrt{2a}) dt = 8a^2 k \int_0^{\sqrt{2a}} t \ln(t + \sqrt{2a}) dt - 8ka \int_0^{\sqrt{2a}} t^3 \ln(t + \sqrt{2a}) dt$$

$$+ 2k \int_0^{\sqrt{2a}} t^5 \ln(t + \sqrt{2a}) dt - 8ka^2 \left(\frac{a}{2} + a \ln \sqrt{2a} \right) - 8ka \left(\frac{7}{12} a^2 + a^2 \ln \sqrt{2a} \right)$$

$$+ 2k \left(\frac{37}{45} a^3 + \frac{4}{3} a^3 \ln \sqrt{2a} \right) = \frac{44}{45} ka^3 + \frac{8}{3} ka^3 \ln \sqrt{2a} = \frac{44}{45} ka^3 + \frac{4}{3} ka^3 \ln 2a.$$

因而最后得 $M = \frac{32}{15} ka^3 - \left(\frac{4}{3} ka^3 \ln 2a - \frac{4}{9} ka^3 \right) + \left(\frac{44}{45} ka^3 + \frac{4}{3} ka^3 \ln 2a \right) = \frac{32}{9} ka^3$.

仿照上述方法可求得一次矩 $M_y = \int_a^a dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} kx \sqrt{(x-a)^2 + y^2} dy = -\frac{32}{45} ka^4$.

而由对称性得 $M_x = 0$. 于是,质心的坐标为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = -\frac{a}{5}, \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = 0.$$

【4060】 求曲线 $y = \sqrt{2px}$, $y = 0$, $x = X$ 所围图形的质心在参数 X 变化时所描绘的曲线.

解 变动面积的质量为 $M = \rho \int_0^x dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \rho \frac{2\sqrt{2p}}{3} X^{\frac{3}{2}},$

而一次矩 $M_x = \rho \int_0^x x dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \rho \frac{2\sqrt{2p}}{5} X^{\frac{5}{2}}, \quad M_y = \rho \int_0^x dx \int_0^{\sqrt{2px}} y dy = \rho \frac{1}{2} p X^2.$

于是,变动面积的质心为 $x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{3}{5} X, \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{3\sqrt{pX}}{4\sqrt{2}}.$

因此,质心的轨迹方程为 $y_0 = \frac{3}{4\sqrt{2}} \sqrt{p \cdot \frac{5}{3} x_0} = \frac{1}{8} \sqrt{30px_0},$

此即所求的曲线方程,其图形是抛物线的一半.

求由下列曲线所围的面积($\rho=1$)对坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量 I_x 和 I_y :

【4061】 $\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1, \frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1, y=0 \quad (b_1>0, b_2>0, h>0).$

解 若设 $b_2>b_1$, 则

$$I_x = \int_0^h y^2 dy \int_{\frac{1}{h}y}^{\frac{b_2}{h}y} dx = (b_2 - b_1) \int_0^h y^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = \frac{(b_2 - b_1)h^4}{12}.$$

$$I_y = \int_0^h dy \int_{\frac{1}{h}y}^{\frac{b_2}{h}y} x^2 dx = \frac{b_2^3 - b_1^3}{3} \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^3 dy = \frac{h(b_2^3 - b_1^3)}{12};$$

若设 $b_1>b_2$, 则

$$I_x = \frac{(b_1 - b_2)h^4}{12}, \quad I_y = \frac{h(b_1^3 - b_2^3)}{12}.$$

【4062】 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, x=0, y=0 \quad (0 \leq x \leq a).$

$$\begin{aligned} \text{解 } I_x &= \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} y^2 dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^a [a^3 - 3a^2 \sqrt{2ax-x^2} + 3a(2ax-x^2) - (2ax-x^2)^{\frac{5}{2}}] dx \\ &= \frac{1}{3} \left[a^3 x - 3a^2 \left(\frac{x}{2} a \sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x-a}{2} \right) + 3a^2 x^2 - ax^3 \right] \Big|_0^a - \frac{1}{3} \int_0^a (2ax-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= a^4 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^4 \cos^4 t dt = a^4 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \cos^4 t dt \\ &= a^4 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{a^4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a^4}{16} (16 - 5\pi). \end{aligned}$$

利用图形的对称性, 即得 $I_y = I_x = \frac{a^4}{16} (16 - 5\pi).$

*) 作代换 $x-a = a \sin t$.

【4063】 $r = a(1 + \cos \varphi).$

解 曲线所围的平面域可表示为 $-\pi \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq a(1 + \cos \varphi).$

于是,

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r dr d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} a^4 (1 + \cos \varphi)^4 \sin^2 \varphi d\varphi \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} a^4 \int_0^{\pi} (1 + 4\cos \varphi + 6\cos^2 \varphi + 4\cos^3 \varphi + \cos^4 \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \pi a^4 \cdot \frac{21}{16} = \frac{21}{32} \pi a^4, \\ I_y &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 \cos^2 \varphi \cdot r dr d\varphi = \frac{1}{2} a^4 \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^4 \cos^2 \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{2} a^4 \int_0^{\pi} (\cos^2 \varphi + 4\cos^3 \varphi + 6\cos^4 \varphi + 4\cos^5 \varphi + \cos^6 \varphi) d\varphi = \frac{49}{32} \pi a^4. \end{aligned}$$

*) 对于任意正整数 n , 有 $\int_0^{\pi} \cos^n \varphi d\varphi = \begin{cases} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi d\varphi, & n \text{ 为偶数}; \\ 0, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$

为算出 I_x, I_y 的值,也可变换被积函数的形式,直接用换元法计算,这样较简单.事实上,我们有

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{a^4}{2} \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^4 \sin^2\varphi d\varphi - 2^6 a^4 \int_0^\pi \cos^{10}\frac{\varphi}{2} \sin^2\frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= 2^6 a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10}x (1-\cos^2x) dx - 2^6 a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \left(1 - \frac{11}{12}\right) \frac{\pi}{2} = \frac{21}{32} \pi a^4. \\ I_y &= \frac{a^4}{2} \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^4 \cos^2\varphi d\varphi = \frac{a^4}{2} \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^4 d\varphi - \frac{21}{32} \pi a^4 \\ &= 2^4 a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x dx - \frac{21}{32} \pi a^4 = \frac{70}{32} \pi a^4 - \frac{21}{32} \pi a^4 = \frac{49}{32} \pi a^4. \end{aligned}$$

【4064】 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

解 曲线的图像关于两坐标轴和直线 $y=x$ 是对称的,参看 1542 题的图像. 曲线的极坐标方程为

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

根据对称性,只要算出从 $\varphi=0$ 到 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 那部分面积的转动惯量再八倍起来即得结果,并且显然有 $I_x = I_y$.

于是,我们有

$$\begin{aligned} I_x = I_y &= 4 \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}} r^3 dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4 d\varphi}{(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4 d\varphi}{(1 - 2\sin^2\varphi \cos^2\varphi)^2} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4 d\varphi}{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\varphi\right)^2} = 16a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{(3 + \cos 4\varphi)^2} = \frac{4a^4}{9} \int_0^\pi \frac{dx}{\left(1 + \frac{1}{3}\cos x\right)^2} \quad * \\ &= \frac{4a^4}{9} \left[-\frac{\frac{1}{3}\sin x}{\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\cos x\right)} + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}} \tan \frac{x}{2}\right) \right] \Big|_0^\pi \quad ** \\ &= \frac{4a^4}{9} \cdot 2 \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

*) 作代换 $x=4\varphi$.

**) 利用 2063 题的结果.

【4065】 $xy=a^2, xy=2a^2, x=2y, 2x=y \ (x>0, y>0)$.

解 作代换 $xy=u, \frac{y}{x}=v$, 则 $x=\sqrt{\frac{u}{v}}, y=\sqrt{uv}$, 且雅可比行列式的绝对值 $|I|=\frac{1}{2v}$, 曲线所围的面积即积分域变为

$$a^2 \leq u \leq 2a^2, \quad \frac{1}{2} \leq v \leq 2.$$

$$\text{于是, } I_x = \iint_{\Omega} y^2 dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 dv \int_{a^2}^{2a^2} \frac{uv}{2v} du = \frac{9a^4}{8}, \quad I_y = \iint_{\Omega} x^2 dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 dv \int_{a^2}^{2a^2} \frac{u}{2v^2} du = \frac{9a^4}{8}.$$

【4066】 求曲线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 所围区域 S 的极转动惯量

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy.$$

解 引用极坐标,则图形 S 的界线的极坐标方程为

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi,$$

这是双纽线. 利用对称性,得 $I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{a^2 \cos 2\varphi}} r^3 dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^4 \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{\pi a^4}{8}.$

【4067】 证明公式:

$$I_l = I_0 + Sd^2,$$

其中 I_l, I_0 是图形 S 对于二平行轴 l 和 l_0 的转动惯量,其中 l_0 是通过图形的质心,而 d 为两轴间的距离.

证明思路 取 l_0 轴为 Ox 轴, 图形 S 的质心为坐标原点, 则 $I_l = \iint_S (y-d)^2 dx dy$. 由题设即易获证.

证 取 l_0 轴为 Ox 轴, 图形的质心为坐标原点, 则

$$I_l = \iint_S (y-d)^2 dx dy = \iint_S y^2 dx dy - 2d \iint_S y dx dy + d^2 \iint_S dx dy.$$

因为 l_0 通过图形 S 的质心, 故 $y_0 - \frac{1}{S} \iint_S y dx dy = 0$, 即 $\iint_S y dx dy = 0$.

$$\text{又} \quad \iint_S y^2 dx dy = I_{l_0}, \quad \iint_S dx dy = S,$$

于是, $I_l = I_{l_0} + Sd^2$.

【4068】 证明: 平面图形 S 对通过其质心 $O(0,0)$ 并与 Ox 轴成 α 角的直线的转动惯量等于

$$I = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha,$$

其中 I_x 和 I_y 为图形 S 对于 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量及 I_{xy} 为惯性积:

$$I_{xy} = \iint_S \rho xy dx dy.$$

证明思路 取直角坐标系 $Ox'y'$, 使 Ox' 轴与 Ox 轴的夹角为 α , 则有

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \quad \text{且} \quad |J| = \left| \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \right| = 1.$$

于是, 所求的转动惯量为 $I = \iint_S y'^2 \rho dx' dy'$. 由题设即易获证.

证 今取直角坐标系 $Ox'y'$, 使 Ox' 轴与 Ox 轴的夹角为 α , 则有

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

这就是旋转变换, 雅可比行列式的绝对值 $|J| = \left| \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \right| = 1$.

于是,

$$\begin{aligned} I &= \iint_S y'^2 \rho dx' dy' = \iint_S (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 \rho dx dy \\ &= \cos^2 \alpha \iint_S \rho y^2 dx dy - 2 \sin \alpha \cos \alpha \iint_S \rho xy dx dy + \sin^2 \alpha \iint_S \rho x^2 dx dy \\ &= I_y \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_x \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

【4069】 求以 a 为边的正三角形对通过三角形质心并与它的高成 α 角的直线的转动惯量.

解 利用 4068 题的结果, 取质心为坐标原点, 不妨取 Ox 轴平行于三角形的一条边, 则过质心与高成 α 角的直线, 即为过坐标原点与 Ox 轴成 α 角的直线. 于是, 所求的转动惯量为

$$I_\alpha = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha.$$

由于三角形三边所在的直线方程分别为

$$y = -\frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad y = -\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}},$$

所以, 根据对称性知:

$$\begin{aligned} I_x &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}x - \frac{a}{\sqrt{3}}} y^2 dy = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{3} \left[\left(-\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^3 - \left(-\frac{a}{2\sqrt{3}} \right)^3 \right] dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \left(-\sqrt{3}x^3 + \sqrt{3}ax^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}a^2x + \frac{\sqrt{3}}{24}a^3 \right) dx - 2\sqrt{3}a^3 \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{64} \right) - \frac{a^4}{32\sqrt{3}}; \end{aligned}$$

$$I_{xy} = \iint_S xy dx dy = 0;$$

$$I_y = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}x - \frac{a}{\sqrt{3}}} x^2 dy = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} x^2 \left[\left(-\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}} \right) + \frac{a}{2\sqrt{3}} \right] dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sqrt{3}x^3 + \frac{\sqrt{3}a}{2}x^2 \right) dx = \sqrt{3}a^4 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{32} \right) = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}.$$

于是,

$$I_z = \frac{a^4}{32\sqrt{3}} \cos^2 \alpha + \frac{a^4}{32\sqrt{3}} \sin^2 \alpha = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}.$$

【4070】 设圆柱形容器 $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ 内盛有水, 水平面为 $z = h$, 求水对容器侧壁 $x \geq 0$ 的压力.

解 用 X 和 Y 分别表示压力在 Ox 与 Oy 轴上的投影. 由对称性, 显然有 $Y = 0$. 下面求 X . 由于 $dS = a d\theta dz$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), 而在面元 dS 上的压力在 Ox 轴上的投影 dX 为 $(z dS) \cos \theta$. 于是,

$$X = \iint_S z \cos \theta dS = \iint_S a z \cos \theta d\theta dz = a \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \right) \left(\int_0^h z dz \right) = ah^2.$$

【4071】 半径为 a 的球体沉入密度为 δ 的液体中深度为 h (由球心算起) 的地方, 这里 $h \geq a$. 求液体对球的上表面和下表面的压力.

解 设球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 则在球面上的点 (x, y, z) 处沉入液体的深度 d 为

$$d = h - z \quad (-a \leq z \leq h).$$

于是, 上半球面 S_1 的点和下半球面 S_2 的点的深度分别为

$$d = h - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}, \quad d = h + \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}.$$

根据对称性知, 压力在 Ox 轴上和 Oy 轴的投影均为零, 故只要计算压力在 Oz 轴上的投影. 液体作用于球的上表面和下表面的压力分别记以 p_1 和 p_2 , 并设 γ 为球上各点处压力的方向 (即内法线方向) 与 Oz 轴正向上的夹角, 则

$$\begin{aligned} p_1 &= \iint_{S_1} d \delta \cos \gamma dS = - \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \delta [h - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}] dx dy = -h\pi a^2 \delta + \delta \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr \\ &= -h\pi a^2 \delta + \left[-\frac{2\pi\delta}{3} \sqrt{(a^2 - r^2)^3} \right] \Big|_0^a = -\pi a^2 \delta \left(h - \frac{2a}{3} \right) \quad (p_1 < 0 \text{ 表示压力向下}). \end{aligned}$$

同理, 我们有

$$p_2 = \iint_{S_2} d \delta \cos \gamma dS = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \delta [h + \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}] dx dy = \pi a^2 \delta \left(h + \frac{2a}{3} \right) \quad (p_2 > 0 \text{ 表示压力向上}).$$

【4072】 底半径为 a 高为 b 的直圆柱体完全沉入密度为 δ 的液体中, 其中心在液面下的深度为 h , 而圆柱的轴与竖直方向成 α 角, 求液体对圆柱上底和下底的压力.

解 取圆柱的中心为坐标原点, 取 Oxy 平面是水平的, 再取圆柱的轴 (朝上的方向) 在 Oxy 平面上的投影所在的方向为 Ox 轴, 取 Oz 轴垂直向上, 最后取 Oy 轴使 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴构成右手系.

于是, 液面方程为 $z = h$. 设圆柱上底为 S_1 , 下底为 S_2 , 则 S_1 所在平面的方程为

$$x \sin \alpha + z \cos \alpha = \frac{b}{2}, \quad (1)$$

S_2 所在平面的方程为

$$x \sin \alpha + z \cos \alpha = -\frac{b}{2}. \quad (2)$$

在点 (x, y, z) 处 ($z \leq h$) 液体的深度为 $h - z$. 用 X_1, Y_1 和 Z_1 分别表示液体在圆柱上底 S_1 上的压力在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上的投影. 同样, 用 X_2, Y_2 和 Z_2 分别表示在 S_2 上的压力在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上的投影. 显然, $Y_1 = Y_2 = 0$. 我们有

$$X_1 = - \iint_{S_1} \delta (h - z) \sin \alpha dS = -\delta \sin \alpha \iint_{S_1} (h - z) dS, \quad (3)$$

$$Z_1 = - \iint_{S_1} \delta (h - z) \cos \alpha dS = -\delta \cos \alpha \iint_{S_1} (h - z) dS. \quad (4)$$

由 (1) 式知, 在 S_1 上有 $z = \frac{b}{2 \cos \alpha} - x \sin \alpha$. 于是, 注意到 S_1 的面积为 πa^2 , 可知

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} (h-z) dS &= \iint_{S_1} \left[h - \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{b}{2} - x \sin \alpha \right) \right] dS = \left(h - \frac{b}{2} \frac{1}{\cos \alpha} \right) \iint_{S_1} dS + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \iint_{S_1} x dS \\ &= \left(h - \frac{b}{2} \frac{1}{\cos \alpha} \right) \pi a^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \iint_{S_1} x dS.\end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{\pi a^2} \iint_{S_1} x dS$ 是 S_1 的质心的 x 坐标, 也即 $\frac{b}{2} \sin \alpha$, 故 $\iint_{S_1} x dS = \frac{1}{2} \pi a^2 b \sin \alpha$, 代入即得

$$\iint_{S_1} (h-z) dS = \left(h - \frac{b}{2 \cos \alpha} \right) \pi a^2 + \frac{1}{2} \pi a^2 b \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \pi a^2.$$

以此代入(3)式与(4)式, 得 $X_1 = -\pi a^2 \delta \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \sin \alpha$, $Z_1 = -\pi a^2 \delta \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \cos \alpha$.

同理, 我们有 $X_2 = \iint_{S_2} \delta(h-z) \sin \alpha dS = \delta \sin \alpha \iint_{S_2} (h-z) dS$, $Z_2 = \iint_{S_2} \delta(h-z) \cos \alpha dS = \delta \cos \alpha \iint_{S_2} (h-z) dS$.

再注意到(2)式, 类似地可计算得

$$\iint_{S_2} (h-z) dS = \iint_{S_2} \left[h + \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{b}{2} + x \sin \alpha \right) \right] dS = \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \pi a^2.$$

于是,

$$X_2 = \pi a^2 \delta \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \sin \alpha, \quad Z_2 = \pi a^2 \delta \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \cos \alpha.$$

【4073】 求均匀的圆柱体 $x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h$ 对质点 $P(0, 0, b)$ 的引力, 设圆柱的质量等于 M , 而质点的质量等于 m .

解 根据对称性知, 引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的投影等于零, 故只要计算引力在 Oz 轴上的投影 F_z . 今取圆环, 其体积为

$$dV = 2\pi r dr dz,$$

则相应的质量为

$$dM = \frac{2\pi r M dr dz}{\pi a^2 h} = \frac{2Mr}{a^2 h} dr dz,$$

吸引质点 P 的引力

$$dF_z = \frac{2krmM(b-z)}{a^2 h \sqrt{[r^2 + (b-z)^2]^3}} dr dz.$$

于是, 所求的引力为

$$\begin{aligned}F_z &= \frac{2kmM}{a^2 h} \int_0^h \int_0^a \frac{r(b-z)}{\sqrt{[r^2 + (b-z)^2]^3}} dr dz = \frac{2kmM}{a^2 h} \left[\int_0^h \operatorname{sgn}(b-z) dz - \int_0^h \frac{b-z}{\sqrt{a^2 + (b-z)^2}} dz \right] \\ &= \frac{2kmM}{a^2 h} [|b| - |b-h| + \sqrt{a^2 + (b-h)^2} - \sqrt{a^2 + b^2}],\end{aligned}$$

其中 k 为引力常数.

【4074】 物体对挤压面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

的压强分布由公式

$$p = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

给出, 求物体对此面的平均压强.

解 物体在椭圆面上的平均压强为

$$p_{\text{av}} = \frac{1}{\pi ab} \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} p \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \frac{1}{\pi ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 p \cdot (1-r^2) a b r dr = \frac{1}{\pi ab} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{p_0 ab}{4} = \frac{p_0}{2}.$$

【4075】 以 a 和 b 为边的矩形草地上均匀地覆盖有已收割的干草, 其面密度为 p . 若运送质量为 M 的货物到距离为 r 的地方所需的功为 kMr ($0 < k < 1$), 则为了把所有的干草集中在草地的中心, 至少应消耗多少功?

解 不妨将坐标原点取在矩形的中心, Ox 轴平行于 a 边, Oy 轴平行于 b 边. 由于将面积 $dx dy$ 上的干草移到中心要消耗的功为 $dW = k p \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 并利用对称性, 即知所要求的功为

$$\begin{aligned} W &= 1kp \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{b}{a}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{a}{2\cos\varphi}} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = 4kp \left[\int_{\arctan \frac{b}{a}}^{\arctan \frac{b}{a}} \int_{\frac{a}{2\cos\varphi}}^{\frac{a}{2\cos\varphi}} r^2 dr d\varphi + \int_{\arctan \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{a}{2\sin\varphi}}^{\frac{b}{2\sin\varphi}} r^2 dr d\varphi \right] \\ &= \frac{kp}{6} \left[a^3 \int_{\arctan \frac{b}{a}}^{\arctan \frac{b}{a}} \frac{1}{\cos^3 \varphi} d\varphi + b^3 \int_{\arctan \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3 \varphi} d\varphi \right]. \end{aligned}$$

但是,

$$\begin{aligned} \int_{\arctan \frac{b}{a}}^{\arctan \frac{b}{a}} \frac{1}{\cos^3 \varphi} d\varphi &= \left[\frac{\sin \varphi}{2\cos^2 \varphi} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right] \Big|_{\arctan \frac{b}{a}}^{\arctan \frac{b}{a}} = \frac{b \sqrt{a^2+b^2}}{2a^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{b + \sqrt{a^2+b^2}}{a}, \\ \int_{\arctan \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3 \varphi} d\varphi &= \left[-\frac{\cos \varphi}{2\sin^2 \varphi} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{\varphi}{2} \right| \right] \Big|_{\arctan \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a \sqrt{a^2+b^2}}{2b^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{b}, \end{aligned}$$

于是, 我们有
$$W = \frac{kp}{12} \left(2ab \sqrt{a^2+b^2} + a^3 \ln \frac{b + \sqrt{a^2+b^2}}{a} + b^3 \ln \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{b} \right).$$

*) 利用 2000 题的结果.

**) 利用 1999 题的结果.

§ 6. 三重积分

1° 三重积分的直接计算法 函数 $f(x, y, z)$ 是连续的, 且有界区域 V 由下列不等式给出:

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y),$$

其中 $y_1(x), y_2(x), z_1(x, y), z_2(x, y)$ 皆为连续函数, 则函数 $f(x, y, z)$ 在区域 V 内的三重积分可按公式

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

来计算. 有时采用下面的公式也很方便:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz,$$

其中 $S(x)$ 是用平面 $x =$ 常数截区域 V 所得的截面.

2° 三重积分中的变量代换 若连续可微函数

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

给出 $Oxyz$ 空间的有界可求积的三维闭区域 V 与 $O'uvw$ 空间的区域 V' 之间的一一映射,

并且当 $(u, v, w) \in V'$ 时,

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0,$$

则成立公式

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J| du dv dw.$$

在特殊情况下, 有: 1) 圆柱坐标系 φ, r, h , 其中

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h, \quad \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, r, h)} = r.$$

2) 球坐标系 φ, ψ, r , 其中

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi, \quad \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \psi, r)} = r^2 \cos \psi.$$

计算下列三重积分:

【4076】 $\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz$, 其中 V 是曲面 $z = xy, y = x, x = 1, z = 0$ 所围的区域.

解
$$\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^x z^3 dz = \frac{1}{364}.$$

【4077】 $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 V 是曲面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 所围的区域.

解
$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2} \right]_0^{1-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2} \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{8}y - \frac{1}{2(1+x+y)} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[-\frac{3}{8} + \frac{x}{8} + \frac{1}{2(1+x)} \right] dx \\ &= \left[-\frac{3}{8}x + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}\ln(1+x) \right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

【4078】 $\iiint_V xyz dx dy dz$, 其中 V 是曲面 $x^2+y^2+z^2=1, x=0, y=0, z=0$ 所围的区域.

解
$$\begin{aligned} \iiint_V xyz dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2) dy \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

【4079】 $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$, 其中 V 是曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所围的区域.

解题思路 设 P_r, Q_r, R_z 分别表示区域 V 与平面 $x=\text{常数}, y=\text{常数}, z=\text{常数}$ 所截部分在 Oyz, Ozx, Oxy 平面上的投影, 则有

$$\text{原式} = \int_a^u \frac{x^2}{a^2} dx \iint_{P_r} dy dz + \int_b^u \frac{y^2}{b^2} dy \iint_{Q_r} dz dx + \int_c^u \frac{z^2}{c^2} dz \iint_{R_z} dx dy.$$

解 设 P_r, Q_r, R_z 分别表示区域 V 与平面 $x=\text{常数}, y=\text{常数}, z=\text{常数}$ 所截部分在 Oyz, Oxz, Oxy 平面上的投影, 则有

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz &= \int_a^u \frac{x^2}{a^2} dx \iint_{P_r} dy dz + \int_b^u \frac{y^2}{b^2} dy \iint_{Q_r} dz dx + \int_c^u \frac{z^2}{c^2} dz \iint_{R_z} dx dy \\ &= \frac{\pi bc}{a^2} \int_a^u x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx + \frac{\pi ac}{b^2} \int_b^u y^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) dy + \frac{\pi ab}{c^2} \int_c^u z^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) dz = 3 \cdot \frac{4\pi abc}{15} = \frac{4\pi abc}{5}. \end{aligned}$$

*) P_r 在平面 $x=\text{常数}$ 上的方程为

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)} = 1,$$

故其面积为

$$\pi b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Q_r 及 R_z 的面积类推.

【4080】 $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$, 其中 V 是曲面 $x^2+y^2=z^2, z=1$ 所围的区域.

解题思路 注意曲面在 Oxy 平面上的投影 Q 为圆盘 $x^2+y^2 \leq 1$. 则有

$$\text{原式} = \iint_Q dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \sqrt{x^2+y^2} dz.$$

解 曲面在 Oxy 平面上的投影 Q 为圆盘 $x^2+y^2 \leq 1$. 于是,

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz &= \iint_Q dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \sqrt{x^2+y^2} dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r - r^2) r dr = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

在下列三重积分内,用不同方法配置积分的上下限:

【4081】 $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz.$

解 有界区域 V 如图 8.52 所示.

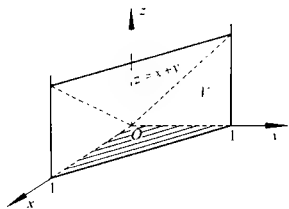


图 8.52

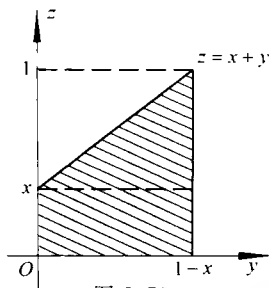


图 8.53

如果先对 y 积分,再对 z, x 积分,如图 8.53 所示,则积分域在 Oyz 平面上的投影域由诸直线 $z=0, z=x+y, y=0, y=1-x$ (x 固定) 围成.于是,我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dx \left\{ \int_0^z dz \int_0^{1-x-z} f(x, y, z) dy + \int_z^{1-x} dz \int_z^{1-x-z} f(x, y, z) dy \right\}, \end{aligned}$$

如果先对 x 积分,再对 y, z 积分,如图 8.54 所示,则有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dz \left\{ \int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z) dx + \int_z^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} f(x, y, z) dx \right\}. \end{aligned}$$

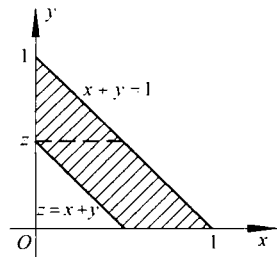


图 8.54

*) 这里用的公式为

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz,$$

【4082】 $\int_1^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2-y^2}}^1 f(x, y, z) dz.$

解 有界区域 V 如图 8.55 所示.

如果先对 y 积分,再对 z, x 积分,如图 8.56 所示,则积分域在 Oyz 平面上的投影域由不等式

$$|x| \leq z \leq 1, -\sqrt{z^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{z^2-x^2},$$

(x 固定)给出.于是,我们有

$$\begin{aligned} & \int_1^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2-y^2}}^1 f(x, y, z) dz \\ &= \int_1^1 dx \int_z^1 dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dy. \end{aligned}$$

如果先对 x 积分,再对 y, z 积分,如图 8.57 所示,则有

$$\int_1^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2-y^2}}^1 f(x, y, z) dz = \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_{\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dx.$$

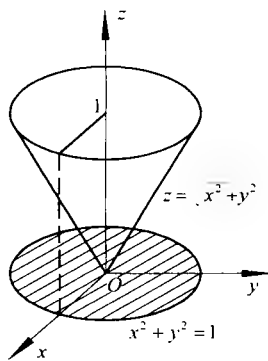


图 8.55

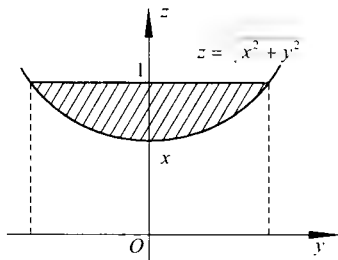


图 8.56

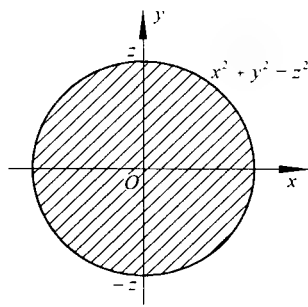


图 8.57

【4083】 $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz.$

解 如果先对 y 积分, 再对 z, x 积分, 则积分域在 Oxy 平面上的投影域由方程

$$x=1, z=0, z=x^2 \quad \text{及} \quad x=0, x=1, z=x^2, z=x^2+1$$

所表示的曲线围成. 于是, 我们有

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz = \int_0^1 dx \left[\int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) dy \right].$$

如果先对 x 积分, 再对 z, y 积分, 不难由轮换对称关系得出结果.

如果先对 x 积分, 再对 y, z 积分, 则积分域在 Oyz 平面上的投影域由方程

$$y=1, z=0, y=\sqrt{z} \quad \text{及} \quad y=0, y=1, y=\sqrt{z}, y=\sqrt{z+1}$$

所表示的曲线围成. 于是, 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dz \left[\int_0^{\sqrt{z}} dy \int_0^{\sqrt{z-y^2}} f(x, y, z) dx + \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dx \right] + \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx. \end{aligned}$$

*) 这里采用的投影方式与前两题不同, 系用结果

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_S dx dz \int_{v_1}^{v_2} f(x, y, z) dy.$$

以一重积分代替三重积分:

【4084】 $\int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta$

解 $\int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta = \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\zeta \int_\zeta^\xi f(\zeta) d\eta = \int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\zeta)(\xi-\zeta) d\zeta = \int_0^x d\zeta \int_\zeta^x f(\zeta)(\xi-\zeta) d\xi$
 $= \frac{1}{2} \int_0^x f(\zeta)(x-\zeta)^2 d\zeta.$

【4085】 $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z) dz.$

解 化为先对 y 积分, 再对 x, z 积分, 可将原积分表示成如下两部分:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz \left[\int_z^1 dx \int_0^{x-z} f(z) dy + \int_0^z dx \int_{x-z}^1 f(z) dy \right] = \int_0^1 dz \int_z^1 f(z) dx + \int_0^1 dz \int_0^z f(z)(1-z+x) dx \\ &= \int_0^1 f(z)(1-z) dz + \int_0^1 f(z)(1-z)z dz + \frac{1}{2} \int_0^1 f(z)z^2 dz \\ &= \int_0^1 f(z) \left(1 - \frac{z^2}{2} \right) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 f(z)(2-z^2) dz; \\ & \int_1^2 dz \int_{z-1}^1 dx \int_{x-z+1}^1 f(z) dy = \int_1^2 dz \int_{z-1}^1 f(z)(1-z+x) dx = \int_1^2 \left[f(z)(1-z)x + \frac{1}{2} f(z)x^2 \right] \Big|_{z-1}^1 dz \\ &= \int_1^2 f(z) \left[1-z + (z-1)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(z-1)^2 \right] dz = \frac{1}{2} \int_1^2 f(z)(z-2)^2 dz, \end{aligned}$$

于是, $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{1-x-y} f(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 f(z)(2-z)^2 dz + \frac{1}{2} \int_1^2 f(z)(2-z)^2 dz$.

【4086】 设 $f(x, y, z) = F'''_{xyz}(x, y, z)$, 且 a, b, c, A, B, C 为常数, 求

$$\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x, y, z) dz.$$

解 $\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x, y, z) dz = \int_a^A dx \int_b^B [F''_{xy}(x, y, C) - F''_{xy}(x, y, c)] dy$
 $= \int_a^A [F'_{xy}(x, B, C) - F'_{xy}(x, b, C) - F'_{xy}(x, B, c) + F'_{xy}(x, b, c)] dx$
 $= F(A, B, C) - F(a, B, C) - F(A, b, C) + F(a, b, C) - F(A, B, c) + F(a, B, c) + F(A, b, c) - F(a, b, c).$

变换为球坐标, 计算积分:

【4087】 $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, 其中 V 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 所围的区域.

提示 注意积分域 V 为 $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sin \psi$, 且 $|I| = r^2 \cos \psi$.

解 令 $x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi$, 则曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 化为 $r = \sin \psi$. 从而,

$$V: 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sin \psi, |I| = r^2 \cos \psi.$$

于是,

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sin \psi} r \cdot r^2 \cos \psi dr = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \psi \cos \psi d\psi = \frac{\pi}{10}.$$

【4088】 $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz$.

提示 注意积分域 V 为 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sqrt{2}$.

解 变换为球坐标, 积分域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sqrt{2}.$$

于是,

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cos \psi \cdot r^2 \sin^2 \psi dr = \frac{1}{5} 4\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi \sin^2 \psi d\psi$$

$$= \frac{\pi}{5} 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} \sin^3 \psi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{15} (2\sqrt{2} - 1).$$

【4089】 在积分中变换为球坐标:

$$\iiint_V f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz,$$

其中 V 是曲面 $z = x^2 + y^2, x = y, x = 1, y = 0, z = 0$ 所围的区域.

解 引用球坐标, 由 $x = y, x = 1, y = 0$ 知: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

(图 8.58).

又从原点引半射线, 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 穿进, 平面 $x = 1$ 穿出,

于是, 得 r 的下限为 $r = \frac{\sin \psi}{\cos^2 \psi}$, r 的上限为 $r = \frac{1}{\cos \varphi \cos \psi}$, 而 ψ 的变化域由 $z = 0$ 到 $z = x^2 + y^2, x = 1$ 所决定, 即

$$0 \leq \psi \leq \arctan \frac{1}{\cos \varphi}.$$

于是,

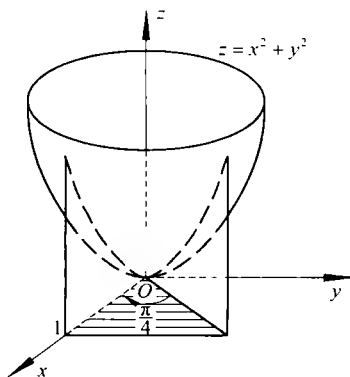


图 8.58

$$\iiint_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\arctan \frac{1}{\cos\varphi}} \cos\psi d\psi \int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}} r^2 f(r) dr.$$

*) 因为 $x=1$ 对应 $r=\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}$, $z=x^2+y^2$ 对应 $r=\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$, 故 $\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}=\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$, 即 $\psi=\arctan \frac{1}{\cos\varphi}$.

【4090】 进行适当的变量代换, 计算三重积分

$$\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} dx dy dz,$$

其中 V 为椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

解题思路 作变量代换 $x=\arccos\varphi\cos\psi$, $y=b\sin\varphi\cos\psi$, $z=c\sin\psi$.

则有 $|I|=abcr^2\cos\psi$, 且对于 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分(第一卦限)有 $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$, $0\leq\psi\leq\frac{\pi}{2}$, $0\leq r\leq 1$.

解 作变量代换 $x=\arccos\varphi\cos\psi$, $y=b\sin\varphi\cos\psi$, $z=c\sin\psi$.

则有 $|I|=abcr^2\cos\psi$, 且对于 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分有

$$0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}, \quad 0\leq\psi\leq\frac{\pi}{2}, \quad 0\leq r\leq 1.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} dx dy dz = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abcr^2 \cos\psi \sqrt{1-r^2} dr = 4\pi \int_0^1 abcr^2 \sqrt{1-r^2} dr \\ & = 4\pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t dt = \frac{\pi abc}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t) dt = \frac{\pi^2 abc}{4}. \end{aligned}$$

【4091】 变换为圆柱坐标, 计算积分 $\iiint_V (x^2+y^2) dx dy dz$, 其中 V 是曲面 $x^2+y^2=2z$, $z=2$ 所围的区域.

提示 注意积分域 V 为 $0\leq\varphi\leq 2\pi$, $0\leq r\leq 2$, $\frac{r^2}{2}\leq z\leq 2$, 且 $|I|=r$.

解 令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, 则 $x^2+y^2=2z$ 化为 $r^2=2z$. 积分域

$$V: 0\leq\varphi\leq 2\pi, \quad 0\leq r\leq 2, \quad \frac{r^2}{2}\leq z\leq 2. \quad |I|=r.$$

于是,

$$\iiint_V (x^2+y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 \cdot r dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz = \frac{16\pi}{3}.$$

【4092】 计算积分

$$\iiint_V x^2 dx dy dz$$

其中 V 是曲面 $z=ay^2$, $z=by^2$, $y>0$ ($0<a<b$), $z=ax$, $z=\beta x$ ($0<a<\beta$), $x=h$ ($h>0$) 所围的区域.

解题思路 作变量代换 $\frac{z}{y^2}=u$, $\frac{z}{x}=v$, $z=w$, 则有 $x=\frac{w}{v}$, $y=\sqrt{\frac{w}{u}}$, $z=w$ 及 $|I|=\frac{w\sqrt{w}}{2u\sqrt{uv}}$, 且区域 V

为 $a\leq u\leq b$, $\alpha\leq v\leq\beta$, $0\leq w\leq h$, 且 $|I|=\frac{w\sqrt{w}}{2u\sqrt{uv}}$.

解 作变换 $\frac{z}{y^2}=u$, $\frac{z}{x}=v$, $z=w$, 则 $x=\frac{w}{v}$, $y=\sqrt{\frac{w}{u}}$, $z=w$. 从而, 积分域变为

$$V: a\leq u\leq b, \quad \alpha\leq v\leq\beta, \quad 0\leq w\leq h,$$

且雅可比行列式

$$I = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{w}{v^2} & \frac{1}{v} \\ \frac{-\sqrt{w}}{2u\sqrt{u}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{uw}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-w\sqrt{w}}{2u\sqrt{uv}v^2}.$$

于是,
$$\iiint_V x^2 dx dy dz = \int_0^h w^{\frac{7}{2}} dw \int_0^\beta \frac{1}{v^4} dv \int_a^b \frac{1}{2u\sqrt{u}} du = \frac{2}{27} \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) h^{\frac{1}{2}} \sqrt{h}.$$

【4093】 求积分

$$\iiint_V xyz dx dy dz,$$

其中 V 位于 $x>0, y>0, z>0$ 这一卦限内且由下列曲面围成:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{m}, z = \frac{x^2 + y^2}{n}, xy = a^2, xy = b^2, y = \alpha x, y = \beta x \quad (0 < a < b, 0 < \alpha < \beta, 0 < m < n).$$

解题思路 作变量代换 $\frac{z}{x^2 + y^2} = u, xy = v, \frac{y}{x} = w$, 则有 $x = \sqrt{\frac{v}{w}}, y = \sqrt{vw}, z = uv(w + \frac{1}{w})$ 及 $|I| =$

$\frac{v}{2w}(w + \frac{1}{w})$, 且区域 V 变为 $\frac{1}{n} \leq u \leq \frac{1}{m}, a^2 \leq v \leq b^2, \alpha \leq w \leq \beta$.

解 作变换 $\frac{z}{x^2 + y^2} = u, xy = v, \frac{y}{x} = w$, 则 $x = \sqrt{\frac{v}{w}}, y = \sqrt{vw}, z = uv(w + \frac{1}{w})$, 且

$$I = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2w\sqrt{w}} \\ 0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} \\ v(w + \frac{1}{w}) & u(w + \frac{1}{w}) & uv(1 - \frac{1}{w^2}) \end{vmatrix} = -\frac{v}{2w}(w + \frac{1}{w}),$$

$$V: \frac{1}{n} \leq u \leq \frac{1}{m}, a^2 \leq v \leq b^2, \alpha \leq w \leq \beta.$$

于是,

$$\begin{aligned} \iiint_V xyz dx dy dz &= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{u}{2} du \int_{a^2}^{b^2} v^2 dv \int_{\alpha}^{\beta} \left(w + \frac{1}{w^3} + \frac{2}{w} \right) dw \\ &= \frac{1}{32} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) (b^8 - a^8) \left[(\beta^2 - \alpha^2) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \right) + 4 \ln \frac{\beta}{\alpha} \right]. \end{aligned}$$

【4094】 求函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$ 内的平均值.

解 区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$ 即

$$\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{3}{4},$$

其体积 $V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi$. 作变换: $x = r \cos \varphi \cos \psi + \frac{1}{2}, y = r \sin \varphi \cos \psi + \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2} + r \sin \psi$,

则有 $f_{\text{平均}} = \frac{1}{V} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2 \cos \psi \left(\frac{3}{4} + r^2 + r \sin \psi + r \cos \varphi \cos \psi + r \sin \varphi \cos \psi \right) dr \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2 \cos \psi \left(\frac{3}{4} + r^2 \right) dr = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{3\sqrt{3}}{20} \cos \psi d\psi - \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \frac{3\sqrt{3}}{20} d\varphi \\ &= \frac{1}{V} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5} \pi - \frac{2}{\sqrt{3}\pi} \cdot \frac{3\sqrt{3}\pi}{5} = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

【4095】 求函数 $f(x, y, z) = e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}$ 在区域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 内的平均值.

解 由于区域 $V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 为椭球, 其体积等于 $\frac{4}{3} \pi abc$, 故平均值为

$$f_{\text{平均}} = \frac{3}{4\pi abc} \iiint_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}} dx dy dz.$$

若作变换 $x = a r \cos \varphi \cos \psi, y = b r \sin \varphi \cos \psi, z = c r \sin \psi$, 并利用对称性, 则有

$$f_{\psi \mu_j} = \frac{3}{4\pi abc} \cdot 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abc e^r r^2 \cos\psi dr = 3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \right) \left(\int_0^1 r^2 e^r dr \right) = 3(e-2).$$

【4096】 利用中值定理,估计积分

$$u = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

其中 $a^2 + b^2 + c^2 > R^2$.

解 由积分中值定理,有

$$u = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2}} \cdot \frac{1}{3} \pi R^3, \quad (1)$$

其中 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$. 由于函数

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

代表点 (x, y, z) 与点 (a, b, c) 之间的距离,显然在区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 中此距离的最小值是 $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R$, 最大值是 $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R$, 并且只有一个点达到最小值,也只有一个点达到最大值. 因此,函数

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

在区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 中的最大值是 $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R}$, 最小值是 $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R}$, 并且只有一个点达到最大值,也只有一个点达到最小值. 我们证明(1)式中的中值不可能是函数的最大值,也不可能是函数的最小值. 事实上,例如,若是最大值,即

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R},$$

则由(1)式知

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} f(x, y, z) dx dy dz = 0, \quad (2)$$

其中

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

显然,在区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 上 $f(x, y, z) \geq 0$ 且 $f(x, y, z)$ 为连续函数. 于是,由(2)式知在区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 上必有 $f(x, y, z) = 0$, 这显然是不可能的. 因此,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R} < \frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2}} < \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R},$$

即

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R < \sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2} < \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R,$$

故

$$\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \theta R,$$

其中 $|\theta| < 1$. 于是,由(1)式得

$$u = \frac{4\pi}{3} \frac{R^3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \theta R}.$$

【4097】 证明:若函数 $f(x, y, z)$ 在区域 V 内是连续的,且对于任何区域 $\omega \subset V$ 有

$$\iiint_{\omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0,$$

则当 $(x, y, z) \in V$ 时, $f(x, y, z) = 0$.

提示 用反证法及积分中值定理.

证 用反证法. 若当 $(x, y, z) \in V$ 时, $f(x, y, z) \not\equiv 0$. 不失一般性,设对于 V 的某内点 (x_0, y_0, z_0) , 有 $f(x_0, y_0, z_0) > 0$, 则由于 $f(x, y, z)$ 的连续性,故存在点 (x_0, y_0, z_0) 的某个闭邻域 $\omega' \subset V$, 使当 $(x, y, z) \in \omega'$ 时, $f(x, y, z) > 0$. 这样一来,利用中值定理,即有

$$\iiint_{\omega'} f(x, y, z) dx dy dz = f(\xi, \eta, \zeta) \cdot V_{\omega'} > 0,$$

其中 $(\xi, \eta, \zeta) \in \omega' \subset V$. 这与假设 $\iiint_{\omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0$ 矛盾. 因此, 当 $(x, y, z) \in V$ 时, $f(x, y, z) = 0$.

【4098】 求 $F'(t)$, 设:

$$(1) F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz, \text{ 其中 } f \text{ 为可微函数};$$

$$(2) F(t) = \iiint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t \\ 0 \leq z \leq t}} f(xyz) dx dy dz, \text{ 其中 } f \text{ 为可微函数}.$$

提示 (1) 作球坐标变换; (2) 作变量代换 $x = t\xi, y = t\eta, z = t\zeta$.

解 (1) 作球坐标变换得

$$F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_0^t f(r^2) r^2 dr = 4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr,$$

于是, $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$.

(2) 作变换 $x = t\xi, y = t\eta, z = t\zeta$ 得

$$F(t) = \iiint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t \\ 0 \leq z \leq t}} f(xyz) dx dy dz = \iiint_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1}} f(t^3 \xi \eta \zeta) t^3 d\xi d\eta d\zeta,$$

于是,

$$F'(t) = 3 \iiint_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1}} t^2 f(t^3 \xi \eta \zeta) d\xi d\eta d\zeta + 3 \iiint_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1}} f'(t^3 \xi \eta \zeta) t^5 \xi \eta \zeta d\xi d\eta d\zeta = \frac{3}{t} \left[F(t) + \iiint_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1}} f'(xyz) xyz dx dy dz \right].$$

【4099】 求 $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz$, 其中 m, n, p 为非负整数.

解 分两种情况:

(1) 设 m, n, p 中至少有一个是奇数. 例如, 设 p 为奇数. 于是,

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz = \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \neq 0}} x^m y^n z^p dx dy dz + \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z=0}} x^m y^n z^p dx dy dz = I_1 + I_2.$$

今在积分 I_2 中作变量代换 $x = u, y = v, z = -w$, 则 $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = -1$, 从而, 注意到 p 为奇数, 可知

$$I_2 = \iiint_{\substack{u^2+v^2+w^2 \leq 1 \\ w \neq 0}} u^m v^n w^p du dv dw = -I_1,$$

于是, $I = I_1 - I_1 = 0$.

(2) 设 m, n, p 均为偶数. 此时被积函数 $x^m y^n z^p$ 关于三个坐标平面皆对称. 于是,

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz = 8 \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} x^m y^n z^p dx dy dz.$$

引用球坐标, $x = r \cos\varphi \cos\psi, y = r \sin\varphi \cos\psi, z = r \sin\psi$, 得

$$\begin{aligned} \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} x^m y^n z^p dx dy dz &= \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+n+1} \psi \sin^p \psi d\psi \int_0^1 r^{m+n+p+2} dr \\ &= \frac{1}{m+n+p+3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2}) \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+n+2}{2})} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m+n+2}{2}) \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+n+p+3}{2})} \\ &= \frac{1}{4(m+n+p+3)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2}) \Gamma(\frac{n+1}{2}) \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+n+p+3}{2})} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4(m+n+p+3)} \cdot \frac{\frac{(m-1)!!}{2^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{(p-1)!!}{2^{\frac{p}{2}}} \cdot \pi \sqrt{\pi}}{\frac{(m+n+p+1)!!}{2^{\frac{m+n+p+1}{2}}} \cdot \sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{\pi}{2(m+n+p+3)} \cdot \frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!},$$

故 $I = \iiint_{x^2+y^2+z^2=1} x^m y^n z^p dx dy dz = \frac{4\pi}{m+n+p+3} \cdot \frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}.$

*) 利用 3856 题的结果.

【4100】 令 $x+y+z=\xi$, $y+z=\xi\eta$, $z=\xi\eta\zeta$, 计算狄利克雷积分

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz \quad (p>0, q>0, r>0, s>0),$$

其中 V 是平面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 所围的区域.

解 由假设知 $x=\xi(1-\eta)$, $y=\xi\eta(1-\zeta)$, $z=\xi\eta\zeta$.

在此变换下可求得 $|I|=\xi^s \eta$, 并且积分域 V 变为:

$$0<\xi<1, 0<\eta<1, 0<\zeta<1.$$

于是,

$$\begin{aligned} \iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz &= \int_0^1 \xi^{p+q+r+s+1} (1-\xi)^s d\xi \int_0^1 \eta^{q+r+1} (1-\eta)^p d\eta \int_0^1 \zeta^r (1-\zeta)^s d\zeta \\ &= B(p+q+r+3, s+1) B(q+r+2, p+1) B(r+1, q+1) \\ &= \frac{\Gamma(p+q+r+3) \Gamma(s+1) \Gamma(q+r+2) \Gamma(p+1) \Gamma(r+1) \Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4) \Gamma(p+q+r+3) \Gamma(q+r+2)} \\ &= \frac{\Gamma(p+1) \Gamma(q+1) \Gamma(s+1) \Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}. \end{aligned}$$

§ 7. 利用三重积分计算体积

区域的体积 V 可表示为以下公式: $V = \iiint_V dx dy dz.$

求以下列曲面为界的物体的体积:

【4101】 $z=x^2+y^2, z=2x^2+2y^2, y=x, y=x^2.$

解 区域 V 为 $0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x, x^2+y^2 \leq z \leq 2x^2+2y^2.$

故体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2+y^2) dy = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} x^3 - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{3} x^4 - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{21} x^7 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{35}. \end{aligned}$$

【4102】 $z=x+y, z=xy, x+y=1, x=0, y=0.$

解 区域 V 为 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, xy \leq z \leq x+y.$

故体积为 $V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{xy}^{x+y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y-xy) dy = \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{(1-x)^3}{2} \right] dx = \frac{7}{24}.$

*) 因为 $0 \leq y \leq 1$, 故有 $xy \leq z \leq x+y.$

【4103】 $x^2+z^2=a^2, x+y=\pm a, x-y=\pm a.$

解 $V = 8 \int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz = 8 \int_0^a (a-x) \sqrt{a^2-x^2} dx$

$$= 8a \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right] \Big|_0^a + \frac{8}{3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a - \frac{2a^3}{3} (3\pi - 4).$$

【4104】 $az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (a > 0).$

解 对区域 V 在 Oxy 平面上的投影作极坐标变换

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

则区域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq a, \quad \frac{r^2}{a} \leq z \leq r,$$

且有 $|I| = r$. 于是, 体积为

$$V = \iint_{\substack{r^2 \leq z \leq r \\ r^2 \leq a^2}} dx dy \int_{\frac{r^2}{a}}^r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{\frac{r^2}{a}}^r dz = 2\pi \int_0^a \left(r^2 - \frac{r^3}{a} \right) dr = \frac{\pi a^3}{6}.$$

【4105】 $az = a^2 - x^2 - y^2, z = a - x - y, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (a > 0).$

解 由 $az = a^2 - x^2 - y^2, x = 0, y = 0, z = 0$ 为界的物体体积为

$$V_1 = \iint_{\substack{r^2 \leq \frac{a^2 - x^2 - y^2}{a} \\ x \geq 0, y \geq 0}} \left(\int_0^{a^2 - x^2 - y^2} dz \right) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \frac{a^2 - r^2}{a} r dr = \frac{\pi a^4}{8}.$$

由 $z = a - x - y, x = 0, y = 0, z = 0$ 为界的物体体积为

$$V_2 = \iiint_{\substack{x+y+z \leq a \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} dz = \frac{a^3}{6}.$$

于是, 所求的体积为 $V = V_1 - V_2 = \frac{a^3}{24} (3\pi - 4).$

【4106】 $z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

提示 利用圆柱坐标, 则区域 V 为 $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 6 - r^2.$

解 引用圆柱坐标, 则区域 V 为 $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 6 - r^2.$

于是, 体积为 $V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_r^{6-r^2} dz = 2\pi \int_0^2 (6r - r^3 - r^2) dr = \frac{32\pi}{3}.$

变换为球坐标或圆柱坐标, 计算以下曲面所围的体积:

【4107】 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 \leq z^2.$

解题思路 变换为圆柱坐标, 则有

$$r^2 + z^2 = 2az \quad \text{及} \quad r^2 \leq z^2,$$

且区域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq a, \quad r \leq z \leq a + \sqrt{a^2 - r^2},$$

这里要注意, 球面方程应该是 $z = a \pm \sqrt{a^2 - r^2}$, 但因体积 V 的一部分为球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 的上半部, 故取 $z = a + \sqrt{a^2 - r^2}.$

解 变换为圆柱坐标, 则有

$$r^2 + z^2 = 2az \quad \text{及} \quad r^2 \leq z^2.$$

因而区域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq a, \quad r \leq z \leq a + \sqrt{a^2 - r^2}.$$

于是, 体积为

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} dz = 2\pi \int_0^a r(a + \sqrt{a^2 - r^2} - r) dr = 2\pi \left[\frac{ar^2}{2} - \frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3} \right] \Big|_0^a = \pi a^3.$$

*) 球面的方程应该是 $z = a \pm \sqrt{a^2 - r^2}$, 但因体积 V 的一部分为球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 的上半部, 故取 $z = a + \sqrt{a^2 - r^2}.$

【4108】 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 + z^2).$

提示 变换为球坐标, 则区域 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分 (第一卦限内) 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq a \sqrt{\cos 2\psi}.$$

解 变换为球坐标,则区域 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq a \sqrt{\cos 2\psi}.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\psi \int_0^{\sqrt{\cos 2\psi}} r^2 \cos\psi dr = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\psi (\cos 2\psi)^{\frac{3}{2}} d\psi = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}} d(\sin\psi) \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - 2x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

*) 作代换 $\sqrt{2}x = \sin t$.

【4109】 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 3xyz$.

解 立体在第一、第二、第六及第八卦限内, 对于这些卦限分别有:

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; \quad x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0; \quad x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0; \quad x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$$

立体在这四个卦限内的各部分, 一对一对地对称于坐标轴之一. 这是因为左端及右端当 x, y, z 中的任何两个同时变号时等号不变.

变换为球坐标, 计算得体积

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt{\frac{3}{4} \cos^2\varphi \cos\psi \sin\psi}} r^2 \cos\psi dr = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi \sin\psi d\psi \\ &= 4 \left(\frac{\sin^2\varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \left(-\frac{1}{4} \cos^4\psi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【4110】 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2, x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0) (0 < a < b)$.

提示 变换为球坐标, 则区域 V 为 $0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, a \leq r \leq b$.

解 变换为球坐标, 得区域 V 为 $0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, a \leq r \leq b$.

于是, 体积为
$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_a^b r^2 \cos\psi dr = 2\pi \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \right) \left(\int_a^b r^2 dr \right) = \frac{\pi(2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3)}{3}.$$

在下列各题中最好利用广义球坐标 $r, \varphi, \psi (r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2})$, 它们由以下公式引入:

$$x = r \cos\varphi \cos\psi, \quad y = r \sin\varphi \cos\psi, \quad z = r \sin\psi \quad (a, b, c, \alpha, \beta \text{ 为常数}),$$

并且

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \alpha\beta abc r^2 \cos^{\alpha-1}\varphi \sin^{\alpha-1}\varphi \cos^{\beta-1}\psi \sin^{\beta-1}\psi.$$

求以下列曲面为界的物体的体积:

【4111】 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x}{h}$.

解 令 $x = r \cos\varphi \cos\psi, y = r \sin\varphi \cos\psi, z = r \sin\psi$, 则区域的 $\frac{1}{4}$ 部分 (第一卦限内) 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{a}{h} \cos\varphi \cos\psi}.$$

于是, 体积为
$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt{\frac{a}{h} \cos\varphi \cos\psi}} abc r^2 \cos\psi dr = \frac{4a^2 bc}{3h} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi d\psi \right) = \frac{\pi a^2 bc}{3h}.$$

【4112】 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

解 令 $x = r \cos\varphi \cos\psi, y = r \sin\varphi \cos\psi, z = r \sin\psi$, 并利用对称性, 即得体积

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos\psi} abc r^2 \cos\psi dr = 8 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{abc}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\psi d\psi = \frac{4\pi abc}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} abc.$$

【4113】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$

解 令 $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi, z = z$, 则 r 满足方程 $r^4 + r^2 - 1 = 0$. 解得 $r = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. 于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} abrd r \int_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} dz = 2\pi abc \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} r(\sqrt{1-r^2} - r^2) dr \\ &= 2\pi abc \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}r^4 \right] \Big|_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} = \frac{5\pi abc(3-\sqrt{5})}{12}. \end{aligned}$$

【4114】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1.$

解 令 $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi, z = z$, 则得体积

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abrd r \int_{(1-r^2)^{\frac{1}{4}}}^{\frac{1}{c}} dz = 4\pi abc \int_0^1 r(1-r^2)^{-\frac{1}{4}} dr = 4\pi abc \left[-\frac{2}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{4}} \right] \Big|_0^1 = \frac{8}{5}\pi abc.$$

【4115】 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1.$

解题思路 作变量代换 $x = ar\cos\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi, y = br\sin\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi, z = cr\sin^{\frac{1}{2}}\psi$.

则有 $|I| = \frac{1}{2}abc r^2 \sin^{\frac{1}{2}}\psi$, 且 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分(第一卦限内)为 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1$. 并利用 3856 题的结果及延拓公式.

解 令 $x = ar\cos\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi, y = br\sin\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi, z = cr\sin^{\frac{1}{2}}\psi$, 则有 $|I| = \frac{1}{2}abc r^2 \sin^{\frac{1}{2}}\psi$ 且 $\frac{1}{8}$ 区域 V (第一卦限内)为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 \frac{1}{2} abc r^2 \sin^{\frac{1}{2}}\psi dr = \frac{2}{3} \pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}}\psi d\psi = \frac{2}{3} \pi abc \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{2}{3} \pi abc \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{3} \pi abc \frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{3} \pi abc \frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2}\pi} \\ &\quad - \frac{1}{3} abc \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

*) 利用 3856 题的结果.

**) 利用延拓公式: $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$.

利用适当的变量代换, 计算以下列曲面为界的物体的体积(假定参数是正的):

【4116】 $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{h} + \frac{y}{k} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$

解题思路 作变量代换 $x = ar\cos^2\varphi\cos^2\psi, y = br\sin^2\varphi\cos^2\psi, z = cr\sin^2\psi$.

则有 $|I| = 4abc r^2 \cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi$, 且区域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi + \frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi.$$

并利用 3856 题的结果.

解 令 $x = ar\cos^2\varphi\cos^2\psi, y = br\sin^2\varphi\cos^2\psi, z = cr\sin^2\psi$, 则有 $|I| = 4abc r^2 \cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi$, 且区域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \left(\frac{a}{h} \cos^2 \varphi + \frac{b}{k} \sin^2 \varphi \right) \cos^2 \psi.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\left(\frac{a}{h} \cos^2 \varphi + \frac{b}{k} \sin^2 \varphi\right) \cos^2 \psi} 4abcr^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^3 \psi \sin \psi dr \\ &= \frac{4}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi \left(\frac{a}{h} \cos^2 \varphi + \frac{b}{k} \sin^2 \varphi \right)^3 d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi \sin \psi d\psi \\ &= \frac{2}{15} abc \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3}{h^3} \cos^7 \varphi \sin \varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b^3}{k^3} \cos \varphi \sin^7 \varphi d\varphi + 3 \cdot \frac{a^2 b}{h^2 k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi + 3 \cdot \frac{ab^2}{hk^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \sin^5 \varphi d\varphi \right) \\ &\quad - \frac{2}{15} abc \left(\frac{a^3}{8h^3} + \frac{b^3}{8k^3} + 3 \cdot \frac{a^2 b}{h^2 k} \cdot \frac{1}{24} + 3 \cdot \frac{ab^2}{hk^2} \cdot \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{60} abc \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k} \right) \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right). \end{aligned}$$

*) 利用 3856 题的结果.

$$\text{【4117】} \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^3 = \frac{xyz}{abc} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

提示 仿 4116 题的解法.

解 令 $x = \arccos^2 \varphi \cos^2 \psi$, $y = br \sin^2 \varphi \cos^2 \psi$, $z = cr \sin^2 \psi$, 则有 $|I| = 4abcr^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^3 \psi \sin \psi$, 且区域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \cos^2 \varphi \sin^2 \psi \cos^4 \psi \sin^2 \psi.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 4abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos^2 \varphi \sin^2 \psi \cos^4 \psi \sin^2 \psi} r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^3 \psi \sin \psi dr \\ &\quad - \frac{4}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \psi \sin^2 \psi d\psi \\ &= \frac{4}{3} abc \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma(4)\Gamma(4)}{\Gamma(8)} \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma(8)\Gamma(4)}{\Gamma(12)} = \frac{1}{3} abc \frac{3! \cdot 3!}{7!} \cdot \frac{7! \cdot 3!}{11!} = \frac{abc}{554400}. \end{aligned}$$

*) 利用 3856 题的结果.

$$\text{【4118】} \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

解题思路 作变量代换 $x = \arccos^2 \varphi \cos \psi$, $y = br \sin^2 \varphi \cos \psi$, $z = cr \sin \psi$.

则有 $|I| = 2abcr^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \psi$, 且区域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

解 令 $x = \arccos^2 \varphi \cos \psi$, $y = br \sin^2 \varphi \cos \psi$, $z = cr \sin \psi$, 则有 $|I| = 2abcr^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \psi$, 且区域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

于是, 体积为

$$V = 2abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \psi dr = \frac{2}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi = \frac{1}{3} abc.$$

$$\text{【4119】} \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 2(x^2 + y^2), \quad xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad x = 2y, \quad 2x = y \quad (x > 0, y > 0).$$

解题思路 作变量代换 $z = u(x^2 + y^2)$, $xy = v$, $x = yw$, 则

$$x = \sqrt{vw}, \quad y = \sqrt{\frac{v}{w}}, \quad z = u \left(vw + \frac{v}{w} \right) \quad \text{及} \quad |I| = \frac{v}{2} + \frac{v}{2w^2},$$

且区域 V 为 $1 \leq u \leq 2$, $a^2 \leq v \leq 2a^2$, $\frac{1}{2} \leq w \leq 2$.

解 令 $z = u(x^2 + y^2)$, $xy = v$, $x = yw$, 则

$$x = \sqrt{vw}, \quad y = \sqrt{\frac{v}{w}}, \quad z = u \left(vw + \frac{v}{w} \right).$$

变换的雅可比行列式为

$$I = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w^3}} \\ vw + \frac{v}{w} & u\left(w + \frac{1}{w}\right) & u\left(v - \frac{v}{w^2}\right) \end{vmatrix} = \left(\frac{v}{2} + \frac{v}{2w^2}\right),$$

而区域 V 为 $1 \leq u \leq 2, \quad a^2 \leq v \leq 2a^2, \quad \frac{1}{2} \leq w \leq 2.$

于是, 体积为

$$V = \int_1^2 du \int_{a^2}^{2a^2} dv \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{v}{2} + \frac{v}{2w^2}\right) dw = \frac{3a^4}{4} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{w^2}\right) dw = \frac{9a^4}{4}.$$

【4120】 $x^2 + z^2 = a^2, x^2 + z^2 = b^2, x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (x > 0).$

解 令 $x = r \cos \varphi, y = y, z = r \sin \varphi$, 则区域 V 为

$$a \leq r \leq b, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad -r \sqrt{\cos 2\varphi} \leq y \leq r \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

于是, 体积为

$$V = \int_a^b r dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{-r\sqrt{\cos 2\varphi}}^{r\sqrt{\cos 2\varphi}} dy = \frac{4}{3} (b^3 - a^3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\varphi} d\varphi = \frac{2}{3} (b^3 - a^3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \varphi} d\varphi \\ = \frac{1}{3} (b^3 - a^3) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{2}{3} (b^3 - a^3) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right).$$

*) 利用 3856 题的结果.

* *) 利用延拓公式有 $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{2} \pi.$

【4121】 $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2}.$

解 采用球坐标 $x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi$, 则区域 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分 (第一卦限内) 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq a \tan^{\frac{1}{3}} \psi.$$

于是, 体积为 $V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{a \tan^{\frac{1}{3}} \psi} r^2 \cos \psi dr = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi d\psi = \frac{4\pi a^3}{3}.$

【4122】 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{z}{h} \cdot e^{\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}.$

解 令 $x = a r \cos \varphi \cos \psi, y = b r \sin \varphi \cos \psi, z = c r \sin \psi$, 则区域 V 的 $\frac{1}{4}$ 部分 (第一卦限内) 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \left(\frac{c}{h} \sin \psi e^{-\sin^2 \psi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

这是由于 $z \geq 0$, 故区域 V 在 Oxy 平面的上方.

于是, 体积为

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\left(\frac{c}{h} \sin \psi e^{-\sin^2 \psi}\right)^{\frac{1}{3}}} abc r^2 \cos \psi dr = \frac{4c^2 ab}{3h} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi \cos \psi e^{-\sin^2 \psi} d\psi \\ = -\frac{\pi abc^2}{3h} e^{-\sin^2 \psi} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi abc^2}{3h} (1 - e^{-1}).$$

$$\text{【4123】} \quad \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}} = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right), \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, x=0, x=a.$$

解题思路 作变量代换 $\frac{x}{a} = u, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = v, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = w$,

则有 $|I| = abc \left(\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{1}{abc} \right)$, 且区域 V 为 $0 \leq u \leq 1, 1 \leq w \leq 1, \frac{2}{\pi} w \arcsin w \leq v \leq 1$.

解 令 $u = \frac{x}{a}, v = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, w = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$, 则

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc},$$

且区域 V 变为 $0 \leq u \leq 1, \frac{2}{\pi} w \arcsin w \leq v \leq 1, 1 \leq w \leq 1$.

于是, $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = abc$, 且体积为

$$\begin{aligned} V &= abc \int_0^1 du \int_1^1 dw \int_{\frac{2}{\pi} \arcsin w}^1 dv = 2abc \int_0^1 \left[1 - \frac{2}{\pi} w \arcsin w \right] dw = 2abc \int_0^1 \arcsin w d(w^2) \\ &= abc + \frac{2abc}{\pi} \int_0^1 w^2 (1 - w^2)^{\frac{1}{2}} dw = abc + \frac{abc}{\pi} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1 - t)^{\frac{1}{2}} dt = abc + \frac{abc}{\pi} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} abc. \end{aligned}$$

$$\text{【4124】} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \ln \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}, \quad x=0, z=0, \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

提示 仿 4123 题的解法.

解 令 $u = \frac{x}{a}, v = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, w = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$, 则 $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \frac{1}{abc}$.

且区域 V 变为

$$0 \leq u \leq w, \quad w e^{-u} \leq v \leq w, \quad 0 \leq w \leq 1.$$

于是, $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = abc$, 且体积为

$$V = abc \int_0^1 dw \int_0^w du \int_{we^{-u}}^w dv = abc \int_0^1 (w^2 - w^2 e^{-u}) dw = abc \left(\frac{1}{3} - 2 + 5e^{-1} \right) = 5abc \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{3} \right).$$

【4125】 曲面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 将球 $x^2 + y^2 + z^2 = 4az$ 分成两部分, 求这两部分的体积之比.

解 曲面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 与球面 $x^2 + y^2 + (z-2a)^2 = 4a^2$ 的交线为圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3a^2 \\ z = a, \end{cases}$$

且有公共的顶点 $(0, 0, 4a)$. 球内位于曲面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 下方部分的体积为

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^a dz \iint_{x^2+y^2 \leq 4az-z^2} dx dy + \int_a^{4a} dz \iint_{x^2+y^2 \leq 4a^2-4az} dx dy = \int_0^a \pi(4az - z^2) dz + \int_a^{4a} \pi(4a^2 - 4az) dz \\ &= 2\pi a^3 - \frac{1}{3}\pi a^3 + 12\pi a^3 - \frac{15}{2}\pi a^3 = \frac{37}{6}\pi a^3. \end{aligned}$$

从而, 另一部分的体积

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi(2a)^3 - \frac{37}{6}\pi a^3 = \frac{27}{6}\pi a^3.$$

于是, 球被曲面所分的两部分体积之比为 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{37}{27}$.

【4126】 求以曲面 $x^2 + y^2 = az$, $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($a > 0$) 为界的物体的体积和表面积.

解 两曲面的交线为圆周
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = a, \end{cases}$$

又曲面 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ 的顶点为 $(0, 0, 2a)$. 于是, 体积为

$$V = \int_0^a dz \iint_{x^2+y^2 \leq az} dx dy + \int_a^{2a} dz \iint_{x^2+y^2 \leq (2a-z)^2} dx dy = \int_0^a \pi a z dz + \int_a^{2a} \pi (2a-z)^2 dz = \frac{\pi a^3}{2} + \frac{\pi a^3}{3} = \frac{5\pi a^3}{6}.$$

由两曲面方程分别可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{a}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

于是, 曲面的表面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2} dx dy + \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+4r^2} a^2 r dr + \sqrt{2} \pi a^2 \\ &= \frac{\pi a^2}{6} (6\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

【4127】 求以平面 $a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2$, $a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$, 为界的平行六面体的体积, 设

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

解题思路 作变量代换

$$a_1x + b_1y + c_1z = u, \quad a_2x + b_2y + c_2z = v, \quad a_3x + b_3y + c_3z = w,$$

则有 $|I| = \frac{1}{|\Delta|}$, 且区域 V 为 $-h_1 \leq u \leq h_1$, $-h_2 \leq v \leq h_2$, $-h_3 \leq w \leq h_3$.

解 令 $a_1x + b_1y + c_1z = u$, $a_2x + b_2y + c_2z = v$, $a_3x + b_3y + c_3z = w$,

则有 $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \Delta$. 于是 $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\Delta}$, 且体积为

$$V = \int_{-h_1}^{h_1} du \int_{-h_2}^{h_2} dv \int_{-h_3}^{h_3} \frac{1}{|\Delta|} dw = \frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}.$$

【4128】 求以曲面 $(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = h^2$ 为界的物体的体积, 设

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

提示 仿 4127 题的解法.

解 令 $a_1x + b_1y + c_1z = u$, $a_2x + b_2y + c_2z = v$, $a_3x + b_3y + c_3z = w$,

则有 $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \Delta$. 于是 $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\Delta}$, 且体积为

$$V = \frac{1}{|\Delta|} \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq h^2} du dv dw = \frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}.$$

【4129】 求以曲面 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^n + \frac{z^{2n}}{c^{2n}} = \frac{z}{h} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2}$ ($n > 1$)

为界的物体的体积.

解 令 $x = ar \cos \varphi \cos \psi$, $y = br \sin \varphi \cos \psi$, $z = cr \sin \psi$, 则有 $|I| = abcr^2 \cos \psi$, 且区域 V 的 $\frac{1}{4}$ 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{c}{h} \cdot \frac{\sin \psi \cos^{2n-1} \psi}{\cos^{2n} \psi + \sin^{2n} \psi}}.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt{\frac{c}{h} \cdot \frac{\sin \psi \cos^{2n-1} \psi}{\cos^{2n} \psi + \sin^{2n} \psi}}} abc r^2 \cos \varphi dr = \frac{2}{3h} \pi abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \psi \cos^{2n-1} \psi}{\cos^{2n} \psi + \sin^{2n} \psi} d\psi \\ &\quad - \frac{2}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{t^{2n-1} dt}{t^{2n} + (1-t^2)^n} = -\frac{1}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{t^{2n-1} d(1-t^2)}{t^{2n} + (1-t^2)^n} \\ &\quad - \frac{1}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1} dx}{(1-x)^n + x^n} = \frac{1}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^n} dx \\ &= \frac{1}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n} = \frac{1}{3h} \pi abc^2 \left[\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}} - \frac{\pi^2}{3n \sin \frac{\pi}{n}} \right] \frac{abc^2}{h}. \end{aligned}$$

*) 作代换 $t = \frac{x}{1-x}$.

*) 利用 3851 题的结果.

【4130】 一物体位于正卦限 $Oxyz$ ($x>0, y>0, z>0$), 并以曲面

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^p}{c^p} = 1 \quad (m>0, n>0, p>0), x=0, y=0, z=0$$

为界, 求其体积.

提示 作变量代换 $x = ar^{\frac{2}{m}} \cos^{\frac{2}{m}} \varphi \cos^{\frac{2}{m}} \psi$, $y = br^{\frac{2}{n}} \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \psi$, $z = cr^{\frac{2}{p}} \sin^{\frac{2}{p}} \psi$, 则有

$$I = \frac{8abc}{mnp} r^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p} - 1} \cos^{\frac{2}{m}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{m}-1} \psi \sin^{\frac{2}{p}-1} \psi.$$

解 令

$$x = ar^{\frac{2}{m}} \cos^{\frac{2}{m}} \varphi \cos^{\frac{2}{m}} \psi, \quad y = br^{\frac{2}{n}} \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \psi, \quad z = cr^{\frac{2}{p}} \sin^{\frac{2}{p}} \psi,$$

则

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \frac{8abc}{mnp} r^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p} - 1} \cos^{\frac{2}{m}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{m}-1} \psi \sin^{\frac{2}{p}-1} \psi.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \frac{8abc}{mnp} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{m}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 1} \psi \sin^{\frac{2}{p}-1} \psi d\psi \cdot \int_0^1 r^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p} - 1} dr \\ &= \frac{8abc}{mnp} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}, \frac{1}{p}\right) \frac{1}{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p}} \\ &= \frac{8abc}{mnp} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)} \frac{mnp}{2(mn + np + mp)} \\ &= \frac{abc}{mn + np + mp} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)}. \end{aligned}$$

*) 利用 3856 题的结果.

§ 8. 三重积分在力学上的应用

1° 物体的质量 若一物体占有区域 V , $\rho = \rho(x, y, z)$ 为它在点 (x, y, z) 的密度, 则该物体的质量等于

$$M = \iiint_V \rho dx dy dz. \quad (1)$$

2° 物体的质心 物体的质心坐标 (x_0, y_0, z_0) 按下列公式来计算

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho x dx dy dz, \\ y_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho y dx dy dz, \\ z_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho z dx dy dz. \end{cases} \quad (2)$$

若物体是均匀的, 则在公式(1)和(2)中可令 $\rho = 1$.

3° 转动惯量 积分

$$I_{xy} = \iiint_V \rho z^2 dx dy dz, \quad I_{yz} = \iiint_V \rho x^2 dx dy dz, \quad I_{zx} = \iiint_V \rho y^2 dx dy dz,$$

分别称为物体对坐标平面的转动惯量.

$$\text{积分} \quad I_l = \iiint_V \rho r^2 dx dy dz$$

(其中 r 为物体各点 (x, y, z) 与轴 l 的距离)称为物体对于某轴 l 的转动惯量. 特别是, 对于坐标轴 Ox, Oy, Oz 分别有

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{xz} + I_{yz}.$$

$$\text{积分} \quad I_0 = \iiint_V \rho (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

称为物体对坐标原点的转动惯量.

$$\text{显然有} \quad I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{xz}.$$

4° 引力势 积分

$$u(x, y, z) = \iiint_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}$$

称为物体在点 $P(x, y, z)$ 的牛顿引力势. 式中 V 为物体所占区域, $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$ 为物体的密度, 且

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

质量为 m 的质点吸引物体的力在坐标轴 Ox, Oy, Oz 上的投影 X, Y, Z 分别等于

$$X = cm \frac{\partial u}{\partial x} = cm \iiint_V \rho \frac{\xi - x}{r^3} d\xi d\eta d\zeta, \quad Y = cm \frac{\partial u}{\partial y} = cm \iiint_V \rho \frac{\eta - y}{r^3} d\xi d\eta d\zeta, \quad Z = cm \frac{\partial u}{\partial z} = cm \iiint_V \rho \frac{\zeta - z}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

其中 c 为引力常量.

【4131】 设物体在点 $M(x, y, z)$ 的密度由公式 $\rho = x + y + z$ 给出, 求占有单位体积 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 之物体的质量.

$$\text{解} \quad \text{质量以 } M \text{ 表示, 则按题设有} \quad M = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z) dz = \frac{3}{2}.$$

【4132】 若物体的密度按规律 $\rho = \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ (其中 $\rho_0 > 0$ 及 $k > 0$ 为常数) 而变化, 求占有无限区域 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ 的物体的质量.

解 若令 $x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi$, 则质量为

$$M = \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \geq 1} \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\psi \int_1^{\infty} r^2 \rho_0 e^{-kr} \cos \psi dr = 4\pi \rho_0 \int_1^{\infty} r^2 e^{-kr} dr$$

$$= -\frac{4\pi\rho_0}{k} \int_1^{+\infty} r^2 \mathrm{d}e^{-kr} = -\frac{4\pi\rho_0}{k} r^2 e^{-kr} \Big|_1^{+\infty} + \frac{4\pi\rho_0}{k} \int_1^{+\infty} 2r e^{-kr} \mathrm{d}r = \frac{4\pi\rho_0}{k} e^{-k} - \frac{8\pi\rho_0}{k^2} \int_1^{+\infty} r \mathrm{d}e^{-kr} \\ = \frac{4\pi\rho_0}{k} e^{-k} - \frac{8\pi\rho_0}{k^2} r e^{-kr} \Big|_1^{+\infty} + \frac{8\pi\rho_0}{k^2} \int_1^{+\infty} e^{-kr} \mathrm{d}r = 4\pi\rho_0 e^{-k} \left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k^3} \right).$$

求以下列曲面为界的均匀物体的质心坐标:

【4133】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z=c.$

提示 作变量代换 $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, $z = z$.

解 若令 $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, $z = z$, 则质量为

$$M = ab \int_0^c \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{z}{c}} r \mathrm{d}r = \frac{\pi abc}{3}.$$

设质心坐标为 x_0, y_0, z_0 , 由对称性知 $x_0 = y_0 = 0$, 而

$$z_0 = \frac{ab}{M} \int_0^c z \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{z}{c}} r \mathrm{d}r = \frac{3}{\pi abc} \cdot \frac{\pi abc^2}{4} = \frac{3c}{4}.$$

于是, 质心为点 $(0, 0, \frac{3c}{4})$.

【4134】 $z = x^2 + y^2, \quad x+y=a, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

解 物体的质量为

$$M = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{a-x} \mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}z = \frac{1}{6} a^4.$$

质心的横坐标为

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_0^a x \mathrm{d}x \int_0^{a-x} \mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}z = \frac{6}{a^4} \cdot \frac{a^5}{15} = \frac{2a}{5}.$$

同理可求得 $y_0 = \frac{2a}{5}$, 而

$$z_0 = \frac{1}{M} \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{a-x} \mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} z \mathrm{d}z = \frac{1}{M} \int_0^a \left(\frac{a^5}{10} - \frac{1}{2} a^4 x + \frac{4}{3} a^3 x^2 - 2a^2 x^3 + 2ax^4 - \frac{14}{15} x^5 \right) \mathrm{d}x \\ = \frac{6}{a^4} \cdot \frac{7}{180} a^6 = \frac{7}{30} a^2.$$

于是, 质心的坐标为 $x_0 = y_0 = \frac{2}{5}a, z_0 = \frac{7}{30}a^2$.

【4135】 $x^2 - 2pz, y^2 - 2px, \quad x = \frac{p}{2}, \quad z=0.$

解 物体的质量为 $M = \int_0^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} \mathrm{d}y \int_0^{\frac{x^2}{2p}} \mathrm{d}z = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^{\frac{p}{2}} x^{\frac{5}{2}} \mathrm{d}x = \frac{p^3}{28}.$

质心的坐标为

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_0^{\frac{p}{2}} x \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} \mathrm{d}y \int_0^{\frac{x^2}{2p}} \mathrm{d}z = \frac{p^4}{72} \cdot \frac{28}{p^3} = \frac{7}{18} p, \quad y_0 = \frac{1}{M} \int_0^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} y \mathrm{d}y \int_0^{\frac{x^2}{2p}} \mathrm{d}z = 0. \\ z_0 = \frac{1}{M} \int_0^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} \mathrm{d}y \int_0^{\frac{x^2}{2p}} z \mathrm{d}z = \frac{p^4}{704} \cdot \frac{28}{p^3} = \frac{7}{176} p.$$

【4136】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

提示 作变量代换 $x = a \cos \varphi \cos \psi$, $y = b \sin \varphi \cos \psi$, $z = c \sin \psi$, 并利用对称性.

解 若令

$$x = a \cos \varphi \cos \psi, \quad y = b \sin \varphi \cos \psi, \quad z = c \sin \psi,$$

则质量为

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\psi \int_0^1 abc r^2 \cos \psi \mathrm{d}r = \frac{1}{6} \pi abc.$$

于是,

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\psi \int_0^1 abc r^2 \cos \psi \cdot a \cos \varphi \cos \psi \mathrm{d}r = \frac{1}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi \mathrm{d}\psi \int_0^1 a^2 b c r^3 \mathrm{d}r$$

$$-\frac{1}{16}\pi a^2 bc \cdot \frac{6}{\pi abc} = \frac{3}{8}a.$$

利用对称性知,质心的坐标为 $x_0 = \frac{3}{8}a, y_0 = \frac{3}{8}b, z_0 = \frac{3}{8}c$.

【4137】 $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2 (z > 0).$

解 物体的质量为 $M = \int_0^a dz \int_{\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2+z^2}} dy \int_{\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2+z^2}} dx = 4 \int_0^a (a^2 - z^2) dz = \frac{8a^3}{3}.$

于是,
$$x = \frac{1}{M} \int_0^a dz \int_{\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2+z^2}} dy \int_{\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2+z^2}} x dx = 0.$$

同理可得 $y_0 = 0$, 而
$$z_0 = \frac{1}{M} \int_0^a z dz \int_{\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2+z^2}} dy \int_{\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2+z^2}} dx = a^4 \cdot \frac{3}{8a^3} = \frac{3}{8}a.$$

于是,质心的坐标为 $x_0 = y_0 = 0, z_0 = \frac{3}{8}a$.

【4138】 $x^2 + y^2 = 2z, x + y = z.$

解 由 $x^2 + y^2 = 2z, x + y = z$ 所围成的区域在平面 $z = 0$ 上的投影为圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$.

若引用代换

$$x = 1 + r \cos \theta, y = 1 + r \sin \theta,$$

则质量为
$$M = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{1-r(\cos\theta+\sin\theta)}^{2-r(\cos\theta+\sin\theta)} dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (1 - \frac{r^2}{2}) r dr = \pi.$$

于是,

$$x = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{1-r(\cos\theta+\sin\theta)}^{2-r(\cos\theta+\sin\theta)} (1+r\cos\theta) dz = \frac{1}{M} \left[\pi + \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 (1 - \frac{r^2}{2}) dr \right] = \frac{\pi}{M} = 1.$$

同理可得 $y_0 = 1$, 而

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{1-r(\cos\theta+\sin\theta)}^{2-r(\cos\theta+\sin\theta)} z dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \left[3 + (\sin\theta + \cos\theta)(2r - r^2) - \frac{1}{4}r^4 - r^2 \right] r dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{10\pi}{3} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

于是,质心的坐标为 $x_0 = y_0 = 1, z_0 = \frac{5}{3}$.

【4139】 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{abc} (x > 0, y > 0, z > 0).$

解 作代换 $x = a \cos \varphi \cos \psi, y = b r \sin \varphi \cos \psi, z = c r \sin \varphi \sin \psi$, 则物体的质量为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos \varphi \sin \varphi \cos^2 \psi \sin \psi} abc r^2 \cos \psi dr = \frac{1}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 \psi \sin^3 \psi d\psi \\ &= \frac{1}{3} abc \cdot \frac{1}{2} B(2, 2) \cdot \frac{1}{2} B(4, 2) = \frac{1}{12} abc \cdot \frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)} \cdot \frac{\Gamma(4)\Gamma(2)}{\Gamma(6)} = \frac{abc}{1440}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} a^2 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos \varphi \sin \varphi \cos^2 \psi \sin \psi} r^4 \cos^2 \psi \cos \varphi dr = \frac{a^2 bc}{4M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \psi \sin^3 \psi d\psi \\ &= \frac{a^2 bc}{4M} \cdot \frac{1}{4} B\left(3, \frac{5}{2}\right) B\left(\frac{11}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{a^2 bc}{4M} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{11}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{11}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(8)} \\ &= \frac{18a^2 bc \pi}{16 \cdot 16 \cdot 7!} \cdot \frac{1440}{abc} = \frac{9\pi}{448} a. \end{aligned}$$

由对称性知,质心的坐标为 $x_0 = \frac{9\pi}{448}a, y_0 = \frac{9\pi}{448}b, z_0 = \frac{9\pi}{448}c$.

【4140】 $z = x^2 + y^2, z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), x + y = \pm 1, x - y = \pm 1.$

解 作代换: $x + y = u, x - y = v$, 则有

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{v-u}{2}, \quad z = \frac{u^2+v^2}{4} \quad \text{及} \quad z = \frac{u^2+v^2}{2},$$

且 $|I| = \frac{1}{2}$ 及区域 V 为: $-1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1, \frac{u^2+v^2}{4} \leq z \leq \frac{u^2+v^2}{2}$. 于是,

$$M = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} dz = \frac{1}{3}.$$

$$x_0 = \frac{1}{4M} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} (u+v) dz = 0,$$

$$y_0 = \frac{1}{4M} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} (v-u) dz = 0,$$

$$z_0 = \frac{1}{2M} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} z dz = \frac{3}{64} \cdot \frac{1}{M} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 (u^4 + 2u^2v^2 + v^4) dv \\ = \frac{3}{64M} \int_{-1}^1 \left(2u^4 + \frac{4u^3}{3} + \frac{2}{5} \right) du = \frac{7}{20}.$$

于是, 质心的坐标为 $x_0 = y_0 = 0, z_0 = \frac{7}{20}$.

【4141】 $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, x=0, y=0, z=0 \quad (n>0, x>0, y>0, z>0)$.

解 作代换 $x = a \cos^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \psi, y = b r \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \psi, z = c r \sin^{\frac{2}{n}} \psi$.

则有 $|I| = \frac{4}{n^2} abc r^2 \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{1}{n}-1} \psi \sin^{\frac{2}{n}-1} \psi$. 于是,

$$M = \frac{4}{n^2} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^2 \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{1}{n}-1} \psi \sin^{\frac{2}{n}-1} \psi dr \\ = \frac{4}{n^2} abc \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{abc}{3n^2} \cdot \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

于是, 质心的坐标为

$$x_0 = \frac{1}{M} \cdot \frac{4}{n^2} a^2 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r \cos^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \psi r^2 \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{1}{n}-1} \psi \sin^{\frac{2}{n}-1} \psi dr \\ = \frac{1}{M} \cdot \frac{a^2 bc}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{4}{n}-1} \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{6}{n}-1} \psi \sin^{\frac{2}{n}-1} \psi d\psi \\ = \frac{1}{M} \cdot \frac{a^2 bc}{n^2} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{M} \cdot \frac{a^2 bc}{4n^2} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} \\ = \frac{3n^2}{abc} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{a^2 bc}{4n^2} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} a,$$

同理可求得

$$y_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} b, \quad z_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} c.$$

【4142】 求形状为立方体 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 的物体的质心坐标, 设此物体在点 (x, y, z) 的密度等于

$$\rho = x^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} y^{\frac{2\beta}{1-\beta}} z^{\frac{2\gamma}{1-\gamma}},$$

其中 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1$.

解 物体的质量为

$$M = \int_0^1 x^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} dx \int_0^1 y^{\frac{1-\beta}{1-\beta}} dy \int_0^1 z^{\frac{1-\gamma}{1-\gamma}} dz = \frac{1-\alpha}{\alpha} x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \Big|_0^1 \cdot \frac{1-\beta}{\beta} y^{\frac{1-\beta}{\beta}} \Big|_0^1 \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma} z^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Big|_0^1 \\ = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}.$$

于是,质心的坐标为

$$x = \frac{1}{M} \int_0^1 x^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} dx \int_0^1 y^{\frac{1-\beta}{1-\beta}} dy \int_0^1 z^{\frac{1-\gamma}{1-\gamma}} dz = \frac{\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} (1-\alpha) \frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{\beta\gamma} = \alpha.$$

同理可求得 $y = \beta, z = \gamma$.

求以下列曲面(参变量是正的)为界的均匀物体对于坐标平面的转动惯量:

【4143】 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x=0, y=0, z=0.$

解 $I_{xy} = \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} z^2 dz = \frac{c^3}{3} \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^3 dy \\ = \frac{bc^3}{12} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^4 \Big|_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx = \frac{bc^3}{12} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^4 dx = \frac{abc^3}{60}.$

利用对称性可得

$$I_{yz} = \frac{a^3 bc}{60}, \quad I_{zx} = \frac{ab^3 c}{60}.$$

【4144】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

提示 作代换 $x = a \cos \varphi \cos \psi, y = b \sin \varphi \cos \psi, z = c \sin \psi$, 并利用对称性.

解 若令 $x = a \cos \varphi \cos \psi, y = b \sin \varphi \cos \psi, z = c \sin \psi$, 则有

$$I_{xy} = abc^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^4 \cos \psi \sin^2 \psi dr = \frac{abc^3}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi \sin^2 \psi d\psi = \frac{abc^3}{15} 2\pi \sin^3 \psi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{15} \pi abc^3.$$

利用对称性可得

$$I_{yz} = \frac{4}{15} \pi a^3 bc, \quad I_{zx} = \frac{4}{15} \pi ab^3 c.$$

【4145】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z = c.$

解 若令 $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$, 则有

$$I_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab r dr \int_c^1 z^2 dz = \frac{1}{5} \pi abc^3,$$

$$I_{yz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab r dr \int_c^1 (\cos \varphi)^2 dz = a^3 bc \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^1 (1-r) r^3 dr = \frac{1}{20} \pi a^3 bc.$$

利用对称性可得

$$I_{zx} = \frac{1}{20} \pi ab^3 c.$$

【4146】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}.$

解 若令 $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$, 则得区域 V 为

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \cos \varphi, \quad -c \sqrt{1-r^2} \leq z \leq c \sqrt{1-r^2}.$$

于是,

$$I_{xy} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} ab r dr \int_{-c \sqrt{1-r^2}}^{c \sqrt{1-r^2}} z^2 dz = \frac{2}{3} abc^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} r dr \\ = \frac{2}{15} abc^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1 - (\sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}] d\varphi = \frac{4}{15} abc^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \varphi) d\varphi \\ = \frac{4}{15} abc^3 \left(\varphi + \cos \varphi - \frac{2}{3} \cos^3 \varphi + \frac{1}{5} \cos^5 \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2abc^3}{225} (15\pi - 16).$$

$$\begin{aligned}
I_{yz} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} abrd r \int_{\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1+r^2}} (arcos\varphi)^2 dz - 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \sqrt{1-r^2} r^3 dr \\
&= 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \sin t \cos^3 t dt = 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \left\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^0 |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \right\} d\varphi = 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{2}{15} + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \right\} \cos^2\varphi d\varphi \\
&= 2a^3bc \left\{ \frac{\pi}{15} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t \cos^3 t dt \right) \cos^2\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t \cos^3 t dt \right) \cos^2\varphi d\varphi \right\} \\
&= 2a^3bc \left\{ \frac{\pi}{15} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{5} \sin^5\varphi - \frac{1}{3} \sin^3\varphi \right) \cos^2\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{5} \sin^5\varphi - \frac{1}{3} \sin^3\varphi \right) \cos^2\varphi d\varphi \right\} \\
&= 2a^3bc \left(\frac{\pi}{15} - \frac{92}{1575} \right) - \frac{2a^3bc}{1575} (105\pi - 92),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{zx} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} abrd r \int_{\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1+r^2}} (br\sin\varphi)^2 dz - 2ab^3c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \sqrt{1-r^2} r^3 \sin^2\varphi dr \\
&= 2ab^3c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \sin t \cos^3 t dt = 2ab^3c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{2}{15} + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \right\} \sin^2\varphi d\varphi \\
&= 2ab^3c \left\{ \frac{\pi}{15} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{5} \sin^5\varphi - \frac{1}{3} \sin^3\varphi \right) \sin^2\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{5} \sin^5\varphi - \frac{1}{3} \sin^3\varphi \right) \sin^2\varphi d\varphi \right\} \\
&= 2ab^3c \left(\frac{\pi}{15} - \frac{272}{1575} \right) - \frac{2ab^3c}{1575} (105\pi - 272).
\end{aligned}$$

【4147】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$

解 两曲面在 Oxy 平面上的投影为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{x}{a} - 2 \frac{y}{b} = 0$, 即 $\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 = 2$. 若令

$$\frac{x}{a} = 1 + r\cos\varphi, \quad \frac{y}{b} = 1 + r\sin\varphi,$$

则得区域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad c \left[1 + \frac{r^2}{2} + r(\cos\varphi + \sin\varphi) \right] \leq z \leq c[2 + r(\cos\varphi + \sin\varphi)].$$

于是,

$$\begin{aligned}
I_{yz} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} abrd r \int_{c[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]}^{c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]} z^2 dz - \frac{1}{3}abc^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r \left[8 + 12r(\cos\varphi + \sin\varphi) + 6r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 \right. \\
&\quad \left. \left(1 + \frac{r^2}{2} \right)^3 - 3 \left(1 + \frac{r^2}{2} \right)^2 r(\cos\varphi + \sin\varphi) - 3 \left(1 + \frac{r^2}{2} \right) r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 \right] dr = \frac{7}{2}\pi abc^3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{yz} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} a^3br(1+r\cos\varphi)^2 dr \int_{c[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]}^{c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]} dz = a^3bc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r(1+2r\cos\varphi+r^2\cos^2\varphi) \left(1 + \frac{r^2}{2} \right) dr \\
&= \frac{4}{3}\pi a^3bc.
\end{aligned}$$

利用对称性得 $I_{zx} = \frac{4}{3}\pi ab^3c$.

求以下列曲面为界的均匀物体对于 Oz 轴的转动惯量:

【4148】 $z = x^2 + y^2, \quad x + y = \pm 1, \quad x - y = \pm 1, \quad z = 0.$

提示 注意 $I_z = I_{zx} + I_{zy}$, 并令 $x + y = u, \quad x - y = v$.

解 曲面所界的均匀物体对于 Oz 轴的转动惯量记作 I_z , 则 $I_z = I_{zx} + I_{zy}$.

若令 $x + y = u, \quad x - y = v$, 则有 $x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}, \quad z = \frac{u^2+v^2}{2}$, 且 $|J| = \frac{1}{2}$. 于是,

$$I_z = \int_1^1 du \int_1^1 dv \int_0^{\frac{u^2+v^2}{2}} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{u-v}{2} \right)^2 + \left(\frac{u+v}{2} \right)^2 \right\} dz = \int_1^1 du \int_1^1 \frac{(u^2+v^2)^2}{8} dv = \frac{14}{45}.$$

【4149】 $x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + y^2 = z^2 (z > 0)$.

解 若令 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 则有 $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, r \leq z \leq \sqrt{2-r^2}$.

于是,
$$I_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} r^2 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^3 \sqrt{2-r^2} - r^4) dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{8\sqrt{2}}{15} - \frac{1}{5} \right) d\varphi,$$

$$\frac{4\pi}{15} (4\sqrt{2} - 5).$$

*) 作代换 $r = \sqrt{2} \sin t$.

【4150】 求质量为 M 的非均匀球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 对于其直径的转动惯量. 设球内各点 $P(x, y, z)$ 的密度与该点至球心距离成正比.

解 不失一般性, 取 Oz 轴在球内的一段作为直径. 若令

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi,$$

则质量为

$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R r^2 \cos \psi \cdot k r dr = k \pi R^4,$$

由此得 $k = \frac{M}{\pi R^4}$. 从而, 密度 $\rho = \frac{Mr}{\pi R^4}$. 于是, 所求的转动惯量为

$$I_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R r^2 \cos^2 \psi \cdot \frac{Mr^3}{\pi R^4} \cos \psi dr = \frac{2M}{R^4} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi d\psi \right) \left(\int_0^R r^3 dr \right) = \frac{4MR^2}{9}.$$

【4151】 证明等式:

$$I_l = I_{l_0} + Md^2.$$

其中 I_l 为物体对某轴 l 的转动惯量, I_{l_0} 为对平行于 l 并通过物体质心的轴 l_0 的转动惯量, d 为此二轴之间的距离及 M 为物体的质量.

证 取质心为坐标原点 O , z 轴与 l_0 重合, l 与 Oxy 平面的交点为

$(\zeta, \eta, 0)$, 如图 8.59 所示, 则

$$\begin{aligned} I_l &= \iiint_V [(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2] \rho dv \\ &= \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dv + (\zeta^2 + \eta^2) \iiint_V \rho dv - 2\zeta \iiint_V x \rho dv - 2\eta \iiint_V y \rho dv \quad (1) \end{aligned}$$

由于质心在原点, 故 $x_0 = y_0 = 0$, 即

$$x_0 = \frac{1}{M} \iiint_V x \rho dv = 0 \quad \text{及} \quad y_0 = \frac{1}{M} \iiint_V y \rho dv = 0,$$

并且 $M = \iiint_V \rho dv, d^2 = \zeta^2 + \eta^2$, 代入(1)式, 最后得

$$I_l = I_{l_0} + Md^2.$$

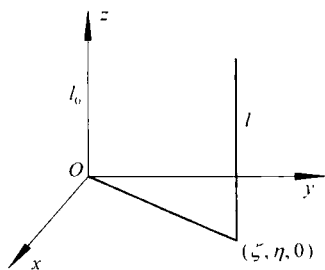


图 8.59

【4152】 证明: 占有区域 V 的物体对过其质心 $O(0, 0, 0)$ 并与坐标轴成角 α, β, γ 的轴 l 的转动惯量等

于: $I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2K_{zx} \cos \alpha \cos \gamma$,

其中 I_x, I_y, I_z 为物体对坐标轴的转动惯量, 而

$$K_{xy} = \iiint_V \rho xy dxdydz, \quad K_{yz} = \iiint_V \rho yz dxdydz, \quad K_{zx} = \iiint_V \rho zx dxdydz$$

为惯性积.

证 如图 8.60 所示. 距离

$$d = \frac{|\vec{OM} \times \vec{OM'}|}{|\vec{OM'}|}$$

$$= \frac{1}{r} \sqrt{\begin{vmatrix} y & z \\ r \cos \beta & r \cos \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ r \cos \gamma & r \cos \alpha \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y \\ r \cos \alpha & r \cos \beta \end{vmatrix}^2}$$

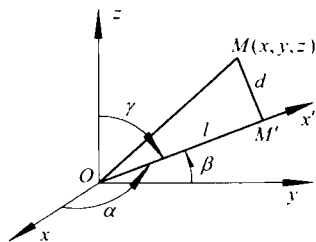


图 8.60

其中 $r = |\overrightarrow{OM}|$. 由于 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 故有

$$d^2 = (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma + (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2xz \cos \alpha \cos \gamma.$$

于是,

$$\begin{aligned} I_t &= \iiint_V \rho d^2 \cdot dxdydz \\ &= \cos^2 \gamma \iiint_V \rho \cdot (x^2 + y^2) dxdydz + \cos^2 \alpha \iiint_V \rho \cdot (y^2 + z^2) dxdydz + \cos^2 \beta \iiint_V \rho \cdot (x^2 + z^2) dxdydz \\ &\quad - 2\cos \alpha \cos \beta \iiint_V \rho xy dxdydz - 2\cos \beta \cos \gamma \iiint_V \rho yz dxdydz - 2\cos \gamma \cos \alpha \iiint_V \rho xz dxdydz \\ &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2K_{zx} \cos \gamma \cos \alpha. \end{aligned}$$

证毕.

【4153】 求密度为 ρ 的均匀圆柱体 $x^2 + y^2 \leq a^2, -h \leq z \leq h$ 对直线 $x = y = z$ 的转动惯量.

提示 利用 4152 题的结果.

解 直线 $x = y = z$ 通过圆柱体的质心 $O(0, 0, 0)$ 且具有方向余弦 $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 若取极坐标,

$$\begin{aligned} \text{则有} \quad I_t &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) dz = \left(\frac{1}{2} \pi a^4 h + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 \right) \rho_0, \\ I_y &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 (r^2 \cos^2 \varphi + z^2) dz = \left(\frac{1}{2} \pi a^4 h + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 \right) \rho_0, \\ I_z &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 r^2 dz = \pi h a^4 \rho_0, \quad K_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 r^2 \cos \varphi \sin \varphi dz = 0, \\ K_{yz} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 r \sin \varphi z dz = 0, \quad K_{zx} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 r \cos \varphi z dz = 0. \end{aligned}$$

于是, 利用 4152 题结果即得

$$\begin{aligned} I_t &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2K_{zx} \cos \gamma \cos \alpha \\ &= \frac{\rho_0}{3} \left(\frac{1}{2} \pi a^4 h + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 + \frac{1}{2} \pi a^4 h + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 + \pi a^4 h \right) - \frac{2}{3} \pi \rho_0 a^2 h \left(a^2 + \frac{2}{3} h^2 \right) - \frac{M}{3} \left(a^2 + \frac{2}{3} h^2 \right), \end{aligned}$$

其中 $M = 2\pi \rho_0 a^2 h$ 为圆柱体的质量.

【4154】 求密度为 ρ 以曲面 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$

为界的均匀物体对坐标原点的转动惯量.

解 若令 $x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi$, 则对坐标原点的转动惯量为

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{a \cos \psi} \rho \cdot r^2 \cdot r^2 \cos \psi dr = \frac{4\pi \rho a^7}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \psi d\psi = \frac{4\pi \rho a^7}{5} \cdot \frac{5\pi}{32} = \frac{\pi^2 a^7 \rho}{8}.$$

*) 利用 2282 题的结果.

【4155】 求密度为 ρ_0 的均匀球体 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$ 在点 (x, y, z) 的牛顿引力势.

提示 取 $O\xi$ 轴通过点 $P(x, y, z)$, 即易获解.

解 由对称性显然可知, 所求的牛顿引力势与 ξ, η, ζ 轴取的方向无关. 今取 $O\xi$ 轴通过点 $P(x, y, z)$, 即得牛顿引力势

$$u(x, y, z) = \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2} \rho_0 \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r)^2}} = \rho_0 \int_{-R}^R d\zeta \iiint_{\xi^2 + \eta^2 \leq R^2 - \zeta^2} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r)^2}},$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 积分之, 得

$$u(x, y, z) = 2\pi \rho_0 \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - 2r\zeta + r^2} - |\zeta - r|) d\zeta.$$

$$\text{由于} \quad \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - 2r\zeta + r^2} d\zeta = \frac{1}{3r} [(R+r)^3 - |R-r|^3] = \begin{cases} \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{1}{r} + 2rR, & r > R, \\ \frac{2}{3} r^3 + 2R^2, & r \leq R, \end{cases}$$

及

$$\int_R^r |\zeta - r| d\zeta = \begin{cases} 2Rr, & r > R, \\ r^2 + R^2, & r \leq R. \end{cases}$$

因而,最后得

$$u(x, y, z) = \begin{cases} \frac{4}{3r} \pi R^3 \rho_0, & r > R, \\ 2\pi \rho_0 \left(R^2 - \frac{1}{3} r^2 \right), & r \leq R. \end{cases}$$

由以上结果可以得到下面两个推论:

(1) 在球外一点上的牛顿引力势,与将球的全部质量集中在它的中心处时一样;

(2) 如考察一个内半径为 R_1 而外半径为 R_2 的空心球,则它在位于其空隙处的一点 ($r < R$) 上的牛顿引力势可表示成差

$$u(x, y, z) = u_2(x, y, z) - u_1(x, y, z) = \left(R_2^2 - \frac{1}{3} r^2 \right) 2\pi \rho_0 - \left(R_1^2 - \frac{1}{3} r^2 \right) 2\pi \rho_0 = 2\pi (R_2^2 - R_1^2) \rho_0.$$

它对 r 无关,故空心球体在其空隙范围内的引力势保持一个常数值.

【4156】 求球壳层 $R_1^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R_2^2$ 在点 $P(x, y, z)$ 的牛顿引力势. 设密度 $\rho = f(R)$, 其中 f 为已知函数, 而 $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

提示 仿 4155 题.

解 取 $O\xi$ 轴通过点 $P(x, y, z)$, 即得牛顿引力势

$$u(x, y, z) = \iiint_{R_1^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R_2^2} f(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}) \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r)^2}},$$

其中 $r = x^2 + y^2 + z^2$.

若引入球坐标, 即得

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho) \cos\psi \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \sin\psi}} = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} d\rho \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 f(\rho) \frac{\cos\psi d\psi}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \sin\psi}} \\ &= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho) \left(\frac{1}{\rho r} \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \sin\psi} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\rho = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho) \left\{ \frac{1}{\rho r} [\rho - r - (\rho + r)] \right\} d\rho \\ &= \begin{cases} 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho f(\rho) d\rho, & \rho > r, \\ 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2}{r} f(\rho) d\rho, & \rho \leq r. \end{cases} \end{aligned}$$

合并之,最后得

$$u(x, y, z) = 4\pi \int_{R_1}^{R_2} f(\rho) \min\left(\frac{\rho^2}{r}, \rho\right) d\rho.$$

【4157】 求密度 ρ_0 恒定的圆柱体 $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2, 0 \leq \zeta \leq h$ 在点 $P(0, 0, z)$ 的牛顿引力势.

解 若引用柱坐标, 即得

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h d\zeta \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + (\zeta - z)^2}} = 2\pi \rho_0 \int_0^h \sqrt{r^2 + (\zeta - z)^2} \Big|_0^a d\zeta \\ &= 2\pi \rho_0 \int_0^h [\sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2} - |\zeta - z|] d\zeta \\ &= 2\pi \rho_0 \left[\frac{\zeta - z}{2} \sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2} + \frac{a^2}{2} \ln |(\zeta - z)| + \sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2} - \frac{(\zeta - z) |\zeta - z|}{2} \right] \Big|_0^h \\ &= 2\pi \rho_0 \left\{ (h - z) \sqrt{a^2 + (h - z)^2} + z \sqrt{a^2 + z^2} - [(h - z) |h - z| + z |z|] + a^2 \ln \left| \frac{h - z + \sqrt{a^2 + (h - z)^2}}{-z + \sqrt{a^2 + z^2}} \right| \right\}. \end{aligned}$$

【4158】 半径为 R 质量为 M 的均匀球体 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$ 以怎样的力吸引质量为 m 的质点 $P(0, 0, a)$?

解 引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的投影为零, 即 $X=Y=0$, 而在 Oz 轴上的投影为

$$Z = k \rho_0 m \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2} \frac{(\zeta - a) d\xi d\eta d\zeta}{[\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2]^{\frac{3}{2}}} = k m \rho_0 \int_{-R}^R (\zeta - a) d\zeta \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq R^2 - \zeta^2} \frac{d\xi d\eta}{[\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$k m \rho_0 \int_R^R (\zeta - a) d\zeta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{R^2 - \zeta^2}} \frac{r dr}{[r^2 + (\zeta - a)^2]^{\frac{3}{2}}} = 2\pi k m \rho_0 \int_R^R (\zeta - a) \left(\frac{1}{|\zeta - a|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}} \right) d\zeta \\ - 2\pi k m \rho_0 \int_R^R \operatorname{sgn}(\zeta - a) d\zeta - 2\pi k m \rho_0 \int_R^R \frac{(\zeta - a) d\zeta}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}},$$

其中 $\rho_0 = \frac{3M}{4\pi R^3}$.

分别求上述两个积分:

$$\text{当 } a \geq R \text{ 时, } \int_R^R \operatorname{sgn}(\zeta - a) d\zeta = - \int_R^R d\zeta = -2R,$$

$$\text{当 } a < R \text{ 时, } \int_R^R \operatorname{sgn}(\zeta - a) d\zeta = - \int_R^a d\zeta + \int_a^R d\zeta = -2a,$$

而

$$\int_R^R \frac{(\zeta - a) d\zeta}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}} = \frac{1}{2a} \int_R^R \frac{R^2 + a^2 - 2a\zeta - (R^2 + a^2)}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}} d\zeta - a \int_R^R \frac{d\zeta}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}} \\ - \frac{1}{2a} \int_R^R \sqrt{R^2 + a^2 - 2a\zeta} d\zeta + \left(\frac{R^2 + a^2}{2a} - a \right) \int_R^R \frac{d\zeta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2a\zeta}} \\ - \frac{1}{2a} \int_R^R \sqrt{R^2 + a^2 - 2a\zeta} d\zeta + \frac{R^2 - a^2}{2a} \int_R^R \frac{d\zeta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2a\zeta}}.$$

当 $a \geq R$ 时, 将上式右端分别积分, 得结果:

$$\left[\frac{1}{1a^2} (R^2 + a^2 - 2a\zeta)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{R^2 - a^2}{2a} \left(-\frac{1}{2a} \right) \cdot 2 \sqrt{R^2 + a^2 - 2a\zeta} \right] \Big|_R^R \\ - \frac{1}{6a^2} [(a - R)^3 - (a + R)^3] - \frac{R^2 - a^2}{2a^2} [(a - R) - (a + R)] = \frac{2R^4}{3a^2} - 2R;$$

当 $a < R$ 时, 积分得结果:

$$\frac{1}{6a^2} [(R - a)^3 - (a + R)^3] - \frac{R^2 - a^2}{2a^2} [(R - a) - (R + a)] = -\frac{4a}{3}.$$

$$\text{于是, 当 } a \geq R \text{ 时, 则 } Z = 2\pi k m \rho_0 \left(-2R - \frac{2R^4}{3a^2} + 2R \right) = -\frac{4}{3a^2} \pi k m \rho_0 R^4 = -\frac{kMm}{a^2};$$

$$\text{当 } a < R \text{ 时, 则 } Z = 2\pi k m \rho_0 \left(-2a + \frac{4a}{3} \right) = -\frac{4}{3} \pi a k m \rho_0 = -\frac{kMm}{R^3} a.$$

从以上结果可以得到下面两个推论:

(1) 位于球外的一点 ($a \geq R$) 因球体而受到的引力相当于将球体的全部质量 $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0$ 集中在它的中心处时受到的引力, 引力的方向朝向球心;

(2) 对于在球里面的一点 ($a < R$) 来说, 引力与 R 无关, 其大小与 $R = a$ 时的情况一样, 即在点 P 外面的球壳部分对 P 点的引力为零.

【4159】 求密度为 ρ 的均匀圆柱体 $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2, 0 \leq \zeta \leq h$ 对单位质量质点 $P(0, 0, z)$ 的引力.

解 由对称性知, 引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的投影为零, 即 $X = Y = 0$. 若引用柱坐标, 即得引力在 Oz 轴上的投影为

$$Z = k\rho_0 \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq a^2} d\xi d\eta \int_0^h \frac{(\zeta - z) d\zeta}{[\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} = k\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_0^h \frac{(\zeta - z) d\zeta}{[r^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ = 2\pi k\rho_0 \int_0^a r \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (h - z)^2}} \right] dr = 2\pi k\rho_0 [\sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + (h - z)^2} - |z| + |h - z|].$$

易知,

当 $0 \leq z < \frac{h}{2}$ 时, $Z > 0$, 此时吸引力朝着向上的铅垂线;

当 $\frac{h}{2} < z \leq h$ 时, $Z < 0$, 此时吸引力朝着向下的铅垂线;

当 $z = \frac{h}{2}$ 时, $Z=0$, 引力为零.

【4160】 求密度为 ρ_0 的均匀球锥体对位于其顶点的单位质量质点的引力, 设球面半径为 R , 而轴截面的扇形的角等于 2α .

解 由对称性知, 引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的投影为零, 即 $X=Y=0$. 若引用球坐标, 即得引力在 Oz 轴上的投影为

$$Z = \iiint_V \frac{k\rho_0 z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}} dx dy dz = k\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \cos\psi \sin\psi d\psi \int_0^R dr = k\pi R\rho_0 \sin^2\alpha.$$

§ 9. 二重和三重广义积分

1° 无界区域的情形 若二维区域 Ω 是无界的, 函数 $f(x, y)$ 在区域 Ω 上连续, 则定义:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} f(x, y) dx dy, \quad (1)$$

其中 Ω_n 是可求积有界封闭区域, 并且它们组成 Ω 的任意一个竭尽递增序列*. 若右端的极限存在且与序列 Ω_n 的选择无关, 则相应积分称为收敛的; 否则称为发散的.

类似地定义出连续函数在无界三维区域上的三重广义积分.

2° 不连续函数的情形 若函数 $f(x, y)$ 在有界封闭区域 Ω 内除了点 $P(a, b)$ 而外处处是连续的, 则定义:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega \setminus U_{\epsilon}} f(x, y) dx dy, \quad (2)$$

其中 U_{ϵ} 是包含点 P 的以 ϵ 为直径的区域, 并且当极限存在时, 所研究的积分称为收敛的; 否则称为发散的.

假定在点 $P(a, b)$ 的邻近有等式

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{r^a},$$

其中函数 $\varphi(x, y)$ 的绝对值是介于正数 m 和 M 之间, 且

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

则 1) 当 $a < 2$ 时, 积分(2)收敛; 2) 当 $a \geq 2$ 时, 积分(2)发散.

若函数 $f(x, y)$ 有不连续的线, 也可类似地定义出广义积分(2).

不连续函数的广义积分的概念易于引伸到三重积分的情形.

研究下列具有无界积分域的广义积分的收敛性 ($0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$):

【4161】
$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy.$$

解题思路 注意到广义重积分收敛必绝对收敛.

由题设知, 所给积分与积分 $\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^p}$ 同时收敛或同时发散. 由于 $\frac{1}{(x^2+y^2)^p}$ 是正的, 从而引用

极坐标, 即可知所给积分当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

解 由于

$$\frac{m}{(x^2+y^2)^p} \leq \frac{|\varphi(x, y)|}{(x^2+y^2)^p} \leq \frac{M}{(x^2+y^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 即知积分

$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy$$

* 区域 Ω 的竭尽递增序列是指这样的序列 Ω_n , 对任意正整数 n 有 $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$, 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$.

与积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^p} dx dy$ 同时收敛或同时发散. 由于 $\frac{1}{(x^2+y^2)^p}$ 是正的, 故引用极坐标, 得

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^p} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r}{r^{2p}} dr = \begin{cases} \frac{\pi}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

由此可知, 原积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

【4162】 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}.$

解 由于被积函数是正的, 并且关于 Ox 轴和 Oy 轴都对称, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)} = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+x^p)(1+y^q)} = 4 \left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p} \right) \left(\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^q} \right).$$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \frac{1}{1+x^p} = 1$, 故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛, $p < 1$ 时发散, $p = 1$ 时显然也发散 ($\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x} = +\infty$).

因此, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p} = \begin{cases} \text{有限数}, & p > 1, \\ +\infty, & p \leq 1. \end{cases}$

同理有 $\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^q} = \begin{cases} \text{有限数}, & q > 1, \\ +\infty, & q \leq 1. \end{cases}$

由此可知, $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$ 仅当 $p > 1$ 且 $q > 1$ 时收敛, 其他情形均发散.

【4163】 $\iint_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy.$

解 仿 4161 题, 可知积分 $\iint_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy$ 与积分 $\iint_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p}$ 同时收敛或同时发散.

由于被积函数是正的, 故

$$\iint_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p} = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} = 2 \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p};$$

由于, 当 $0 \leq y \leq 1$ 时, 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^p} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p} \quad (\text{若 } p \geq 0),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^p} \geq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} \geq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p} \quad (\text{若 } p < 0),$$

故 $2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^p} \leq \iint_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p} \leq 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p} \quad (p \geq 0),$

若 $p < 0$, 则有相反的不等式.

对于 $a > 0$, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2p} \frac{1}{(a^2+x^2)^p} = 1,$

故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^p}$ 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛, $p < \frac{1}{2}$ 时发散. 实际上, 此积分当 $p = \frac{1}{2}$ 时也发散, 因为

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) \Big|_0^{+\infty} = +\infty.$$

由此可知, 积分 $\iint_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p}$, 从而, 积分 $\iint_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy$ 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛, 当 $p \leq \frac{1}{2}$

时发散.

【4164】 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p > 0, q > 0).$

解 由对称性及被积函数的非负性, 有

$$\iint_{x+y \geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} = 4 \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p + y^q} = 4 \iint_{\Omega_1} \frac{dx dy}{x^p + y^q} + 4 \iint_{\Omega_2} \frac{dx dy}{x^p + y^q},$$

其中 $\Omega_1 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \geq 1, x^p + y^q \leq 2\}$, $\Omega_2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \geq 1, x^p + y^q \geq 2\}$, 令

$\Omega_3 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \geq 2\}$, 易知, 当 $x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \geq 2$ 时必有 $x+y \geq 1$ (因若 $x+y < 1$, 则

必有 $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$, 从而, $0 \leq x^p < 1, 0 \leq y^q < 1$, 这就会得出 $x^p + y^q < 2$), 故 $\Omega_2 = \Omega_3$. 由于 Ω_1 是有界闭区域, 故 (1) 式右端第一个积分为常义积分, 因此, 广义积分

$$\iint_{x+y \geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$$

的敛散性取决于广义积分 $\iint_{\Omega_3} \frac{dx dy}{x^p + y^q}$ 的敛散性, 在此积分中作变量代换 $x = r^{\frac{2}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \theta, y = r^{\frac{2}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \theta$,

$$\text{则易知} \quad \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \frac{4}{pq} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{p} - 1} \theta.$$

于是, 注意到被积函数是非负的, 得

$$\iint_{\Omega_3} \frac{dx dy}{x^p + y^q} = \frac{4}{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{p} - 1} \theta d\theta \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3} dr.$$

由 3856 题的结果知, 右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{p} - 1} \theta d\theta \quad (p > 0, q > 0)$$

恒收敛, 且其值为 $\frac{1}{2} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right)$; 而第二个积分

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3} dr$$

当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 < -1$ (即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$) 时收敛, 当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 \geq -1$ (即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$) 时发散.

综上所述, 可知广义积分 $\iint_{x+y \geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$ 仅当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ 时收敛.

【4165】 $\iint_{x+y \geq 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy.$

解 设此积分收敛, 以 I 表其值. 先设 $p < 1$. 令

$$\Omega_n = \{(x, y) | 1 \leq x+y \leq 2n\pi, -2n\pi \leq x-y \leq 2n\pi\},$$

$$\Omega'_n = \{(x, y) | 1 \leq x+y \leq 2n\pi - \frac{\pi}{4}, -2n\pi \leq x-y \leq 2n\pi\},$$

$$\omega_n = \{(x, y) | 2n\pi - \frac{\pi}{4} \leq x+y \leq 2n\pi, -2n\pi \leq x-y \leq 2n\pi\},$$

其中 $n = 1, 2, 3, \dots$, 则显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = I, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = I.$$

从而,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\iint_{\Omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy - \iint_{\Omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy \right] = I - I = 0. \quad (1)$$

由 $\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$, 今在 (1) 式左端的积分中作变量代换 $x+y = u, x-y = v$ (即

$x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$), 并注意到 $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{2}$, 得

$$\iint_{\omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = \frac{1}{4} \int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} du \int_{-2n\pi}^{2n\pi} \frac{\cos v - \cos u}{u^p} dv = -n\pi \int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du;$$

而

$$\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{du}{u^p} \geq \begin{cases} \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(2n\pi)^p}, & p > 0, \\ \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, & p \leq 0. \end{cases}$$

由此可知(注意前面假定 $p < 1$), $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = +\infty$,

此显然与(1)式矛盾.

现设 $p \geq 1$. 令

$$\omega'_n = \{(x, y) | 2n\pi - \frac{\pi}{4} \leq x+y \leq 2n\pi, -2\pi n^{p+2} \leq x-y \leq 2\pi n^{p+2}\},$$

仿上,应有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = 0. \quad (2)$$

但另一方面,和上面一样,作代换 $x+y=u, x-y=v$ 后,有

$$\iint_{\omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = \pi n^{p+2} \int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du.$$

同样,由

$$\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du \geq \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(2n\pi)^p},$$

即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = +\infty,$$

此显然与(2)式矛盾.

综上所述,可知:不论 p 为何值,积分 $\iint_{x+y \neq 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy$ 都发散.

【4166】 证明:若连续函数 $f(x, y)$ 不为负及 $S_n (n=1, 2, \dots)$ 为有界闭区域,并且组成区域 S 的任意一个竭尽递增序列. 则

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy,$$

这里左端与右端同时有意义或同时无意义.

证 取定一有界闭区域的序列 $S'_n (n=1, 2, \dots)$, $S'_1 \subset S'_2 \subset \dots \subset S'_n \subset \dots \subset S$, 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} S'_n = S$ 由于 $f(x, y)$ 在 S 上非负,故积分序列 $\iint_{S'_n} f(x, y) dx dy$ 是递增的,从而,极限

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S'_n} f(x, y) dx dy \quad (1)$$

存在(是有限数或是 $+\infty$). 我们要证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy = I$. (2)

先设 I 为有限数. 任给 $\epsilon > 0$, 由(1)式知,存在 N , 使当 $n \geq N$ 时,恒有

$$I - \epsilon < \iint_{S'_n} f(x, y) dx dy < I + \epsilon. \quad (3)$$

又存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, $S_n \supset S'_n$. 从而,根据 $f(x, y)$ 的非负性以及(3)式,得

$$\iint_{S_n} f(x, y) dx dy \geq \iint_{S'_n} f(x, y) dx dy > I - \epsilon.$$

另一方面,对每个固定的 $n \geq n_0$ 又必存在某个充分大的 $k_n (\geq N)$ 使 $S'_{k_n} \supset S_n$. 于是,再由(3)式得

$$\iint_{S_n} f(x, y) dx dy \leq \iint_{S'_{k_n}} f(x, y) dx dy < I + \epsilon.$$

由此可知, 当 $n \geq n_0$ 时, 恒有 $I - \epsilon < \iint_{S_n} f(x, y) dx dy < I + \epsilon$,

故(2)式成立.

次设 $I = +\infty$, 任给 $M > 0$, 由(1)式知, 存在 N_1 , 使

$$\iint_{S_{N_1}} f(x, y) dx dy > M.$$

又存在 n_1 , 使当 $n \geq n_1$ 时, 恒有 $S_n \supset S_{N_1}$, 从而, 此时有

$$\iint_{S_n} f(x, y) dx dy \geq \iint_{S_{N_1}} f(x, y) dx dy > M.$$

故(2)式成立. 证毕.

【4167】 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq n \\ x \leq n \\ y \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \pi.$$

然而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq 2n\pi} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0 \quad (n \text{ 为正整数}).$$

证 利用极坐标, 我们有

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 2n\pi} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2n\pi}} r \sin r^2 dr = \pi(1 - \cos 2n\pi) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq 2n\pi} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0.$$

但由对称性, 有

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{x \leq n \\ y \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy &= 4 \iint_{\substack{0 \leq x \leq n \\ 0 \leq y \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_0^n dy \int_0^n (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2) dx \\ &= 4 \left(\int_0^n \cos y^2 dy \right) \left(\int_0^n \sin x^2 dx \right) + 4 \left(\int_0^n \cos x^2 dx \right) \left(\int_0^n \sin y^2 dy \right) = 8 \left(\int_0^n \cos x^2 dx \right) \left(\int_0^n \sin x^2 dx \right). \end{aligned}$$

根据 3830 题的结果, 可知 $\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \sin x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

从而, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\substack{x \leq n \\ y \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 8 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

【4168】 证明: 尽管累次积分

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \quad \text{及} \quad \int_1^\infty dy \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

收敛, 但积分

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

发散.

证 先证两个累次积分收敛. 我们有

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy &= \int_1^\infty \frac{x^2}{2y} \cdot \frac{2y dy}{(x^2 + y^2)^2} - \int_1^\infty \frac{y}{2} \cdot \frac{2y dy}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^2}{2y(x^2 + y^2)} \Big|_{y=1}^\infty - \int_1^\infty \frac{x^2 dy}{2y^2(x^2 + y^2)} + \frac{y}{2(x^2 + y^2)} \Big|_{y=1}^\infty - \int_1^\infty \frac{dy}{2(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{x^2}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \int_1^\infty \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) dy - \frac{1}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{dy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - 1}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2 + 1}, \end{aligned}$$

故

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = - \int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = - \frac{\pi}{4};$$

同理(利用已算得的结果)

$$\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = - \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \int_1^{+\infty} \left(-\frac{1}{y^2 + 1} \right) dy = -\frac{\pi}{4},$$

故两个累次积分都收敛.

次证积分

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \quad (1)$$

发散, 为此只要证积分

$$\iint_{x \geq 1, 1 \leq y \leq x} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \quad (2)$$

发散即可(因为如果积分(1)收敛, 则绝对值积分

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy \quad (3)$$

必收敛, 从而, 在小一点的区域上的积分

$$\iint_{x \geq 1, 1 \leq y \leq x} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy$$

更收敛. 由此可知, 积分(2)收敛). 由于

$$I_n = \iint_{1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq x} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \int_1^n dx \int_1^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy,$$

仿上, 利用部分积分法, 容易算得

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy &= \frac{x^2}{2y(x^2 + y^2)} \Big|_{y=1}^x - \int_1^x \frac{x^2 dy}{2y^2(x^2 + y^2)} + \frac{y}{2(x^2 + y^2)} \Big|_{y=1}^x - \int_1^x \frac{dy}{2(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x}, \end{aligned}$$

$$\text{故 } I_n = \int_1^n \left(-\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x} \right) dx = \frac{\pi}{4} - \arctan n + \frac{1}{2} \ln n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

由此可知积分(2)发散.

注意, 也可用反证法证明积分(1)发散. 假定积分(1)收敛, 于是, 积分(3)收敛, 但恒有

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy = \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dy = \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx, \quad (4)$$

故(4)式中两个累次积分都收敛. 又由前面已证不取绝对值的两个累次积分

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \quad \text{与} \quad \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

都收敛, 故知

$$\begin{aligned} \iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{\pi}{4}, \\ \iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

这是不可能的. 证毕.

计算下列积分(参数是正的):

【4169】 $\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{dx dy}{x^p y^q}.$

解 由于被积函数非负, 故

$$I = \iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{dx dy}{x^p y^q} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dy}{y^q}.$$

而当 $q > 1$ 时,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dy}{y^q} = \frac{x^{q-1}}{q-1}.$$

(注意, 当 $q \leq 1$ 时, 此积分发散, 从而, $I = +\infty$); 又当 $p > q$ 时,

$$I = \frac{1}{q-1} \int_1^{+\infty} x^{q-p+1} dx = \frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

(注意, 当 $p \leq q$ 时, 此积分发散, $I = +\infty$)

综上所述, 可知: 当 $p > q > 1$ 时, $\iint_{\substack{x \geq 1 \\ y \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q} = \frac{1}{(p-q)(q-1)}.$

【4170】 $\iint_{\substack{x+y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 1}} \frac{dx dy}{(x+y)^p}.$

解 由于被积函数非负, 故 $I = \iint_{\substack{x+y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 1}} \frac{dx dy}{(x+y)^p} = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{+\infty} \frac{dy}{(x+y)^p}.$

当 $p > 1$ 时, $\int_{1-x}^{+\infty} \frac{dy}{(x+y)^p} = -\frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{(x+y)^{p-1}} \Big|_{y=1-x}^{+\infty} = \frac{1}{p-1}.$

(注意, 当 $p \leq 1$ 时, 积分发散, $I = +\infty$), 故

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{p-1} = \frac{1}{p-1} \quad (p > 1).$$

【4171】 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$

解 采用极坐标, 由于被积函数非负, 故有

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 2\pi \left(-\sqrt{1-r^2} \right) \Big|_0^1 = -2\pi.$$

【4172】 $\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^p}.$

提示 注意到被积函数非负, 采用极坐标即可获解.

解 采用极坐标, 由于被积函数非负, 故有

$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p+1}} = \begin{cases} \frac{\pi}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

【4173】 $\iint_{y \geq x^2+1} \frac{dx dy}{x^4+y^2}.$

解 由于被积函数非负, 故

$$I = \iint_{y \geq x^2+1} \frac{dx dy}{x^4+y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x^2+1}^{+\infty} \frac{dy}{x^4+y^2} = 2 \int_0^{+\infty} dx \int_{x^2+1}^{+\infty} \frac{dy}{x^4+y^2}.$$

由于 $\int_{x^2+1}^{+\infty} \frac{dy}{x^4+y^2} = \frac{1}{x^2} \arctan \frac{y}{x^2} \Big|_{y=x^2+1}^{+\infty} = \frac{1}{x^2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right],$

故

$$I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] dx \\ = -\frac{2}{x} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] \Big|_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x^3}}{1 + \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}},$$

其中 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{2}{x^3}}{1 + \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} \right) = 0.$

下面计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}}$. 为简单计, 记 $a = \sqrt{\sqrt{2}-1}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} &= \frac{1}{\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - (\sqrt{2}-1)x^2} = \frac{1}{(x^2+b)^2 - (ax)^2} \\ &= \frac{1}{(x^2+ax+b)(x^2-ax+b)} = \frac{1}{2ab} \left[\frac{x+a}{x^2+ax+b} - \frac{x-a}{x^2-ax+b} \right] \\ &= \frac{1}{4ab} \left[\frac{2x+a}{x^2+ax+b} + \frac{a}{x^2+ax+b} - \frac{2x-a}{x^2-ax+b} + \frac{a}{x^2-ax+b} \right]. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} &= \frac{1}{4ab} \int_0^{+\infty} \left[\frac{2x+a}{x^2+ax+b} - \frac{2x-a}{x^2-ax+b} \right] dx + \frac{1}{4b} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{x^2+ax+b} + \frac{1}{x^2-ax+b} \right] dx \\ &= \frac{1}{4ab} \left(\ln \frac{x^2+ax+b}{x^2-ax+b} \right) \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{4b} \left(\frac{2}{\sqrt{4b-a^2}} \arctan \frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}} + \frac{2}{\sqrt{4b-a^2}} \arctan \frac{2x-a}{\sqrt{4b-a^2}} \right) \Big|_0^{+\infty} \\ &= 0 + \frac{1}{4b} \frac{2\pi}{\sqrt{4b-a^2}} = \frac{\pi}{2b \sqrt{4b-a^2}} = \frac{\pi}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2}-1)}} = \frac{\pi}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1}} \\ &= \frac{\pi \sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{2}+1} \sqrt{\sqrt{2}-1}} = \frac{\pi \sqrt{\sqrt{2}-1} \sqrt{2}}{2} = \frac{\pi \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}{2}. \end{aligned}$$

故

$$I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} = \pi \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}.$$

【4174】 $\iint_{0 \leq x \leq y} e^{-(x+y)} dx dy.$

解 由于被积函数非负, 故

$$\iint_{0 \leq x \leq y} e^{-(x+y)} dx dy = \int_0^{+\infty} dy \int_x^{+\infty} e^{-(x+y)} dy = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_x^{+\infty} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2}.$$

变换为极坐标, 计算下列积分:

【4175】 $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$

提示 注意到被积函数非负, 采用极坐标即可获解.

解 由于被积函数非负, 故采用极坐标就有

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_{r=0}^{+\infty} = \pi.$$

【4176】 $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy.$

提示 由于 $|e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)| \leq e^{-(x^2+y^2)}$, 利用 4175 题的结果知所给积分收敛, 对它采用极坐标即可获解.

解 由于 $|e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)| \leq e^{-(x^2+y^2)}$, 而

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

收敛 (参看 4175 题), 故

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy$$

收敛. 从而, 采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} \cos r^2 dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t dt$$

$$= \pi \left(\frac{\sin t - t \cos t}{(-1)^2 + 1^2} e^{-t} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

【4177】 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy.$

提示 仿 4176 题的解法.

解 由于 $|e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2)| \leq e^{-(x^2+y^2)}$, 而积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ 收敛 (参看 4175 题), 故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy$ 收敛. 从而, 采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} \sin r^2 dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt$$

$$= \pi \left(\frac{-\sin t - t \cos t}{(-1)^2 + 1^2} e^{-t} \right) \Big|_0^{+\infty} = -\frac{\pi}{2}.$$

计算下列积分:

【4178】 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2 - 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f} dx dy$, 其中 $a < 0, ac - b^2 > 0$.

解 我们有 (令 $\delta = ac - b^2 > 0, t = x + \frac{b}{a}y$)

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f \\ &= a \left(x^2 + \frac{2b}{a}xy + \frac{b^2}{a^2}y^2 \right) + \frac{ac-b^2}{a}y^2 + 2dx + 2ey + f \\ &= a \left(x + \frac{b}{a}y \right)^2 + \frac{\delta}{a}y^2 + 2dx + 2ey + f = at^2 + \frac{\delta}{a}y^2 + 2d \left(t - \frac{b}{a}y \right) + 2ey + f \\ &= a \left(t^2 + \frac{2d}{a}t + \frac{d^2}{a^2} \right) - \frac{d^2}{a} + \frac{\delta}{a} \left[y^2 + \frac{2}{\delta} (ae - bd)y + \frac{(ae - bd)^2}{\delta^2} \right] - \frac{(ae - bd)^2}{a\delta} + f \\ &= a \left(t + \frac{d}{a} \right)^2 + \frac{\delta}{a} \left(y + \frac{ae - bd}{\delta} \right)^2 + \beta, \end{aligned}$$

其中 $\beta = f - \frac{d^2}{a} - \frac{(ae - bd)^2}{a\delta} = \frac{1}{a\delta} [af(ac - b^2) - d^2(ac - b^2) - (ae - bd)^2]$

$$= -\frac{1}{\delta} (acf - b^2f - cd^2 - ae^2 + 2bde) = \frac{\Delta}{\delta},$$

这里

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

今作变量代换

$$\begin{cases} u = \sqrt{-a}x + \frac{b\sqrt{-a}}{a}y + \frac{d\sqrt{-a}}{a} \\ v = \sqrt{-\frac{\delta}{a}}y + \sqrt{-\frac{\delta}{a}} \frac{ae - bd}{\delta}, \end{cases} \quad (1)$$

则 $\varphi(x, y) = -u^2 - v^2 + \beta$. 又

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \sqrt{-a} & \frac{b}{a}\sqrt{-a} \\ 0 & \sqrt{-\frac{\delta}{a}} \end{vmatrix}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta}} > 0.$$

故线性变换(1)是非退化的, 它将 (x, y) 平面的点与 (u, v) 平面的点一一对应. 于是, 利用 4175 题的结果, 得

$$\int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \int_{-\frac{\sqrt{b}}{2}}^{\frac{\sqrt{b}}{2}} e^{q(x,y)} dx dy = \int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \int_{-\frac{\sqrt{b}}{2}}^{\frac{\sqrt{b}}{2}} e^{-u^2 - v^2 + \beta} \frac{1}{\sqrt{\delta}} du dv = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{\beta}{\delta}} \int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \int_{-\frac{\sqrt{b}}{2}}^{\frac{\sqrt{b}}{2}} e^{-(u^2 + v^2)} du dv = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{\beta}{\delta}}.$$

【4179】
$$\iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy.$$

提示 注意到被积函数非负,采用广义极坐标 $x = a r \cos \varphi, y = b r \sin \varphi$ 即可获解.

解 作广义极坐标变换 $x = a r \cos \theta, y = b r \sin \theta$, 由于被积函数非负, 故

$$\iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} a b r e^{-r^2} dr = 2\pi ab \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_{r=1}^{+\infty} = \frac{\pi}{e} ab.$$

【4180】
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x y e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + 2\epsilon \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy \quad (0 < |\epsilon| < 1).$$

解 作广义极坐标变换 $x = a r \cos \theta, y = b r \sin \theta$, 则有

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x y e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + 2\epsilon \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} a^2 b^2 r^3 \sin 2\theta e^{-r^2(1+\epsilon \sin 2\theta)} dr d\theta. \quad (1)$$

由于 $|r^3 \sin 2\theta e^{-r^2(1+\epsilon \sin 2\theta)}| \leq r^3 e^{-r^2(1-\epsilon)}$, 而积分

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1-\epsilon)} dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1-\epsilon)} dr = 2\pi \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1-\epsilon)} dr < +\infty,$$

故(1)式中的二重广义积分收敛. 于是,

$$I = \frac{1}{2} a^2 b^2 \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1+\epsilon \sin 2\theta)} dr. \quad (2)$$

但是,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1+\epsilon \sin 2\theta)} dr &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t e^{-t(1+\epsilon \sin 2\theta)} dt = -\frac{1}{2(1+\epsilon \sin 2\theta)} \left[t e^{-t(1+\epsilon \sin 2\theta)} \Big|_{t=0}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t(1+\epsilon \sin 2\theta)} dt \right] \\ &= \frac{1}{2(1+\epsilon \sin 2\theta)} \int_0^{+\infty} e^{-t(1+\epsilon \sin 2\theta)} dt = \frac{1}{2(1+\epsilon \sin 2\theta)^2}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} a^2 b^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{(1+\epsilon \sin 2\theta)^2} d\theta = \frac{1}{2} a^2 b^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin 2\theta}{(1+\epsilon \sin 2\theta)^2} d\theta = \frac{1}{4} a^2 b^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin u}{(1+\epsilon \sin u)^2} du \\ &= \frac{1}{4} a^2 b^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{(1+\epsilon \sin u)^2} du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin u}{(1+\epsilon \sin u)^2} du + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin u}{(1+\epsilon \sin u)^2} du + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\sin u}{(1+\epsilon \sin u)^2} du \right] \\ &= -\frac{1}{2} a^2 b^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1+\epsilon \sin u)^2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1-\epsilon \sin u)^2} \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

但是(作代换 $u = \frac{\pi}{2} - v$),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1+\epsilon \sin u)^2} = \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{1+\epsilon \sin u} - \frac{1}{(1+\epsilon \sin u)^2} \right] du = \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{1+\epsilon \cos v} - \frac{1}{(1+\epsilon \cos v)^2} \right] dv,$$

同理, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1-\epsilon \sin u)^2} = -\frac{1}{\epsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{1-\epsilon \cos v} - \frac{1}{(1-\epsilon \cos v)^2} \right] dv.$$

根据 2028 题(1)和 2063 题的结果, 可知(当 $0 < |\epsilon| < 1$ 时)

$$\int \frac{dx}{1+\epsilon \cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan \frac{x}{2} \right) + C, \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{(1+\epsilon \cos x)^2} = -\frac{\epsilon \sin x}{(1-\epsilon^2)(1+\epsilon \cos x)} + \frac{2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan \frac{x}{2} \right) + C. \quad (5)$$

(注意, 2028 题(1)和 2063 题中假定 $0 < \epsilon < 1$, 但从其推导过程可以看出公式(4)、(5)当 $-1 < \epsilon < 0$ 时也成立).

于是,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1-\epsilon \sin u)^2} = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \arctan \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} + \frac{\epsilon}{1-\epsilon^2} - \frac{2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \arctan \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1+\epsilon \sin u)^2} = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \arctan \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} - \frac{\epsilon}{1-\epsilon^2} - \frac{2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \arctan \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \right].$$

从而,由(3)式得 $I = \frac{1}{\epsilon} a^2 b^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - \frac{1}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \left[\arctan \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} + \arctan \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \right]$.

但对任何的 $x > 0$, 有 $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$,

故最后得 $I = \frac{1}{\epsilon} a^2 b^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - \frac{1}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \epsilon a^2 b^2}{2(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$.

研究下列不连续函数的二重广义积分的收敛性 ($0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$):

【4181】 $\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$, 式中区域 Ω 由条件 $|y| \leq x^2; x^2 + y^2 \leq 1$ 确定.

解 显然, Ω 为图 8.61 中的阴影部分. 由于对称性以及被积函数的非负性, 采用极坐标就有

$$\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = 4 \int_0^{\delta} d\theta \int_{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}}^1 \frac{dr}{r} = 4 \int_0^{\delta} \ln \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta,$$

其中 δ 表图 8.61 中射线 OA 与 Ox 轴之间的夹角, 抛物线 $y = x^2$ 的极坐标方程为 $r = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$.

由于

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \theta^{\frac{1}{2}} \ln \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \left[\left(\frac{\theta}{\sin \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos \theta \cdot \frac{\ln \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}}{\left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0,$$

故积分 $\int_0^{\delta} \ln \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta$ 收敛, 从而, 原积分 $\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$ 收敛.

【4182】 $\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2 + xy + y^2)^p} dx dy$.

解 由于 $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(x + y)^2 > 0$ (当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时),

故 $\frac{m}{(x^2 + xy + y^2)^p} \leq \frac{|\varphi(x, y)|}{(x^2 + xy + y^2)^p} \leq \frac{M}{(x^2 + xy + y^2)^p}$ (当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时),

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 即知积分

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{x^2 + xy + y^2} dx dy \quad \text{与积分} \quad \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(x^2 + xy + y^2)^p}$$

同时收敛或同时发散. 由于 $\frac{1}{(x^2 + xy + y^2)^p} > 0$ (当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时), 采用极坐标即得

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(x^2 + xy + y^2)^p} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^p} \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-1}},$$

$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^p}$ 为常义积分, 其值为有限数, 而

$$\int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-1}} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-p)}, & p < 1; \\ +\infty, & p \geq 1. \end{cases}$$

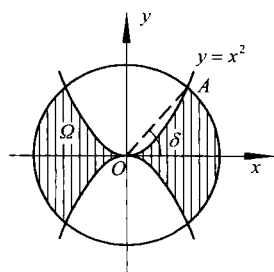


图 8.61

由此可知:原积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p} dx dy$ 当 $p < 1$ 时收敛, 当 $p \geq 1$ 时发散.

【4183】 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p > 0, q > 0).$

解 由对称性及被积函数的非负性, 有

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} = 4 \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} \frac{dx dy}{x^p + y^q} = 4 \iint_{\Omega_1} \frac{dx dy}{x^p + y^q} + 4 \iint_{\Omega_2} \frac{dx dy}{x^p + y^q}, \quad (1)$$

其中 $\Omega_1 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, x^p + y^q \geq 2^{-p-q}\}$, $\Omega_2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, x^p + y^q \leq 2^{-p-q}\}$. 令 $\Omega_3 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \leq 2^{-p-q}\}$. 易知, 当 $x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \leq 2^{-p-q}$ 时, 必有 $x + y \leq 1$ (因为 $x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \leq \frac{1}{2^{p+q}}$, 故 $x^p \leq \frac{1}{2^{p+q}} \leq \frac{1}{2^p}, y^q \leq \frac{1}{2^{p+q}} \leq \frac{1}{2^q}$, 从而, $x \leq \frac{1}{2}, y \leq \frac{1}{2}$, 由此知 $x + y \leq 1$).

故 $\Omega_1 \supset \Omega_2$. 由于函数 $\frac{1}{x^p + y^q}$ 在有界闭区域 Ω_1 上连续, 故(1)式右端第一个积分为常义积分. 因此, 广义积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$$

的敛散性取决于广义积分 $\iint_{\Omega_3} \frac{dx dy}{x^p + y^q}$ 的敛散性. 在此积分中作变量代换

$$x = r^{\frac{2}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \theta, \quad y = r^{\frac{2}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \theta,$$

则易知

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \frac{4}{pq} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{p} - 1} \theta.$$

于是, 注意到被积函数是非负的, 得

$$\iint_{\Omega_3} \frac{dx dy}{x^p + y^q} = \frac{4}{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{p} - 1} \theta d\theta \int_0^{(\sqrt{2})^{-\frac{p}{p+q}}} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3} dr.$$

由 3856 题的结果知, 右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{p} - 1} \theta d\theta \quad (p > 0, q > 0)$$

恒收敛, 且其值为 $\frac{1}{2} B(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$; 而第二个积分

$$\int_0^{(\sqrt{2})^{-\frac{p}{p+q}}} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3} dr$$

当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 > -1$ (即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$) 时收敛, 当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 \leq -1$ (即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$) 时发散.

综上所述, 可知原积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$ 当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ 时收敛, 当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ 时发散.

【4184】 $\int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(x, y)}{|x - y|^p} dx dy.$

解 由于 $\frac{m}{|x - y|^p} \leq \frac{|\varphi(x, y)|}{|x - y|^p} \leq \frac{M}{|x - y|^p}$, 并注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 可知

$$\text{积分} \int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(x, y)}{|x - y|^p} dx dy \quad \text{与积分} \int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x - y|^p}$$

同时收敛或同时发散. 由对称性及被积函数的非负性可知,

$$\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x - y|^p} = 2 \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x}} \frac{dx dy}{(x - y)^p}. \quad (1)$$

当 $p < 1$ 时,

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x}} \frac{dx dy}{(x - y)^p} = \int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{(x - y)^p} = \int_0^a \frac{x^{1-p}}{1-p} dx = \frac{a^{2-p}}{(1-p)(2-p)}.$$

从而, 由(1)式知 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x - y|^p} = \frac{2a^{2-p}}{(1-p)(2-p)}$. 因此, 当 $p < 1$ 时积分 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x - y|^p}$ 收敛.

现设 $p \geq 1$. 首先, 我们有

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p}. \quad (2)$$

若 $p=1$, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} &= \int_{\epsilon}^a dx \int_0^{x-\epsilon} \frac{dy}{x-y} = \int_{\epsilon}^a (\ln x - \ln \epsilon) dx \\ &= a \ln a - a + \epsilon - a \ln \epsilon, \end{aligned}$$

故

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (a \ln a - a + \epsilon - a \ln \epsilon) = +\infty.$$

由此可知, 此时 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$ 发散; 若 $p=2$, 则

$$\iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} = \int_{\epsilon}^a dx \int_0^{x-\epsilon} \frac{dy}{(x-y)^2} = \int_{\epsilon}^a \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{a}{\epsilon} - 1 - \ln a + \ln \epsilon,$$

故

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\frac{a + \epsilon \ln \epsilon}{\epsilon} - 1 - \ln a \right) = +\infty.$$

由此可知, 此时积分 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$ 发散; 最后, 若 $p>1, p \neq 2$, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} &= \int_{\epsilon}^a dx \int_0^{x-\epsilon} \frac{dy}{(x-y)^p} = \frac{1}{p-1} \int_{\epsilon}^a (\epsilon^{1-p} - x^{1-p}) dx \\ &= \frac{1}{(p-1)\epsilon^{p-1}} \left(a - \frac{p-1}{p-2} \epsilon \right) + \frac{1}{(p-1)(p-2)a^{p-2}}. \end{aligned}$$

从而,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} = +\infty.$$

由此可知, 此时积分 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$ 发散.

综上所述, 可知积分 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$ 当 $p < 1$ 时收敛, $p \geq 1$ 时发散.

[4185] $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p} dx dy.$

解 由于

$$\frac{m}{(1-x^2-y^2)^p} \leq \frac{|\varphi(x,y)|}{(1-x^2-y^2)^p} \leq \frac{M}{(1-x^2-y^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 即知

$$\text{积分} \iint_{x^2+y^2 < 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p} dx dy \quad \text{与积分} \iint_{x^2+y^2 < 1} \frac{dx dy}{(1-x^2-y^2)^p}$$

同时收敛或同时发散. 采用极坐标, 由于被积函数 $\frac{1}{(1-x^2-y^2)^p}$ 是正的, 故

$$\iint_{x^2+y^2 < 1} \frac{dx dy}{(1-x^2-y^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{(1-r^2)^p} dr = 2\pi \int_0^1 \frac{r dr}{(1-r)^p (1+r)^p}.$$

由于

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r)^p \frac{r}{(1-r)^p (1+r)^p} = 2^{-p},$$

故积分 $\int_0^1 \frac{r dr}{(1-r)^p (1+r)^p}$ 当 $p < 1$ 时收敛, $p > 1$ 时发散; 当 $p=1$ 时, 有

$$\int_0^1 \frac{r dr}{1-r^2} = -\frac{1}{2} \ln(1-r^2) \Big|_0^1 = +\infty,$$

故积分也发散. 由此可知, 积分 $\iint_{x^2+y^2 < 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p} dx dy$ 当 $p < 1$ 时收敛; 当 $p \geq 1$ 时发散.

[4186] 证明: 若 1) 函数 $\varphi(x,y)$ 在有界区域 $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$ 内连续; 2) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $a \leq x \leq$

A 上连续; 3) $p < 1$, 则积分 $\int_a^A dx \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy$ 收敛.

证 首先注意, 由于 $p < 1$, 故积分 $\int_b^B \frac{dy}{|f(x) - y|^p}$ 对每个固定的 $x \in [a, A]$ 恒收敛, (若 $f(x) \in [b, B]$ 此为瑕积分, 点 $f(x)$ 是瑕点, 由于 $p < 1$, 它收敛; 若 $f(x) \notin [b, B]$, 则为常义积分, 当然收敛). 再根据 $\varphi(x, y)$ 的有界性, 即知: 对每个固定的 $x \in [a, A]$, 积分 $\int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy$ 都收敛. 令

$$F(x) = \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy \quad (a \leq x \leq A).$$

下面我们证明 $F(x)$ 是 $a \leq x \leq A$ 上的连续函数. 若已获证, 则积分

$$\int_a^A dx \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy = \int_a^A F(x) dx$$

显然是收敛的 (右端为常义积分), 于是本题获证. 令 $c = \max_{a \leq x \leq A} |f(x)|$. 今将函数 $\varphi(x, y)$ 连续地延拓到有界闭矩形 $R(a \leq x \leq A, b - 2c \leq y \leq B + 2c)$ 上 (只要规定

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, B), & a \leq x \leq A, B < y \leq B + 2c, \\ \varphi(x, b), & a \leq x \leq A, b - 2c \leq y < b \end{cases}$$

即可). 延拓后的函数仍记为 $\varphi(x, y)$. 由于 $\varphi(x, y)$ 及 $|f(x) - y|^{1-p}$ 都在 R 上连续, 故有界且一致连续: 存在常数 M , 使对一切 $(x, y) \in R$, 有

$$|\varphi(x, y)| \leq M, \quad |f(x) - y|^{1-p} \leq M. \quad (1)$$

任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$ (取 $\delta_1 < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{\frac{1}{1-p}}$), 使当 $|x_1 - x_2| < \delta_1$, $|y_1 - y_2| < \delta_1$ ($(x_1, y_1) \in R, (x_2, y_2) \in R$) 时, 恒有

$$|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)| < \epsilon, \quad (2)$$

$$\left| |f(x_1) - y_1|^{1-p} - |f(x_2) - y_2|^{1-p} \right| < \epsilon. \quad (3)$$

又由 $f(x)$ 在 $[a, A]$ 上的一致连续性可知, 存在 $\delta_2 > 0$, 使当 $|x_1 - x_2| < \delta_2$ ($x_1, x_2 \in [a, A]$), 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \delta_1. \quad (4)$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. 于是, 由 (2) 式可知: 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ ($x_1, x_2 \in [a, A]$) 时, 对一切 $b - c \leq y \leq B + c$, 恒有

$$|\varphi(x_1, y + f(x_1)) - \varphi(x_2, y + f(x_2))| < \epsilon. \quad (5)$$

现设 $|x_1 - x_2| < \delta$, ($x_1, x_2 \in [a, A]$). 不失一般性, 设 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 我们有

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x_2) &= \int_b^B \frac{\varphi(x_1, y)}{|f(x_1) - y|^p} dy - \int_b^B \frac{\varphi(x_2, y)}{|f(x_2) - y|^p} dy \\ &= \int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_1)} \frac{\varphi(x_1, u+f(x_1))}{|u|^p} du - \int_{b-f(x_2)}^{B-f(x_2)} \frac{\varphi(x_2, u+f(x_2))}{|u|^p} du \\ &= \int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{\varphi(x_1, u+f(x_1))}{|u|^p} du - \int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{\varphi(x_2, u+f(x_2))}{|u|^p} du - \int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{\varphi(x_1, u+f(x_1))}{|u|^p} du \\ &\quad + \int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{\varphi(x_2, u+f(x_2))}{|u|^p} du \\ &= I_1 - I_2 + I_3, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 I_1, I_2, I_3 分别表上式中的三个积分. 易知 ($p < 1$)

$$\int_a^\beta \frac{du}{|u|^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} [\beta^{1-p} - a^{1-p}], & 0 \leq a \leq \beta, \\ \frac{1}{1-p} [(-a)^{1-p} - (-\beta)^{1-p}], & a \leq \beta \leq 0, \\ \frac{1}{1-p} [\beta^{1-p} + (-a)^{1-p}], & a < 0 < \beta. \end{cases}$$

从而, 在任何情形下均有

$$\int_a^b \frac{du}{|u|^p} \leq \frac{1}{1-p} (|\beta|^{1-p} + |\alpha|^{1-p}); \quad (7)$$

而当 α, β 同号时, 有

$$\int_a^b \frac{du}{|u|^p} = \frac{1}{1-p} \left| |\beta|^{1-p} - |\alpha|^{1-p} \right|. \quad (8)$$

于是, 由(5)式、(1)式及(7)式, 得

$$|I_1| \leq \epsilon \int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p} \leq \frac{\epsilon}{1-p} (|B-f(x_2)|^{1-p} + |B-f(x_1)|^{1-p}) \leq \frac{2M\epsilon}{1-p}. \quad (9)$$

下面估计 I_2 : 若 $B-f(x_2)$ 与 $B-f(x_1)$ 同号, 则由(1)式、(8)式及(3)式, 有

$$|I_2| \leq M \int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p} = \frac{M}{1-p} \left| |B-f(x_2)|^{1-p} - |B-f(x_1)|^{1-p} \right| < \frac{M\epsilon}{1-p};$$

若 $B-f(x_2)$ 与 $B-f(x_1)$ 异号, 即 $B-f(x_1) < 0 < B-f(x_2)$. 由于 $[B-f(x_2)] - [B-f(x_1)] = f(x_1) - f(x_2) < \delta_1$, 故有 $|B-f(x_1)| < \delta_1, |B-f(x_2)| < \delta_1$. 于是, 由(7)式并注意到 $\delta_1 < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{\frac{1}{1-p}}$, 即得

$$|I_2| \leq M \int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p} \leq \frac{M}{1-p} (|B-f(x_2)|^{1-p} + |B-f(x_1)|^{1-p}) < \frac{M}{1-p} (\delta_1^{1-p} + \delta_1^{1-p}) < \frac{M\epsilon}{1-p}.$$

所以, 在任何情况下均有

$$|I_2| < \frac{M\epsilon}{1-p}. \quad (10)$$

同理, 可得(在任何情况下)

$$|I_3| < \frac{M\epsilon}{1-p}. \quad (11)$$

于是, 由(6)式、(9)式、(10)式及(11)式, 即得

$$|F(x_1) - F(x_2)| < |I_1| + |I_2| + |I_3| < \frac{4M\epsilon}{1-p}.$$

由此可知, $F(x)$ 在 $a \leq x \leq A$ 上(一致)连续, 证毕.

计算下列积分:

【4187】 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy.$

解 采用极坐标, 由于被积函数非负, 故有

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \ln \frac{1}{r} dr = -2\pi \int_0^1 r \ln r dr = -2\pi \left(\frac{r^2}{2} \ln r \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{r}{2} dr \right) = \frac{\pi}{2}.$$

【4188】 $\int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} \quad (a > 0).$

解 $\int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} = \int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} dx.$

作变量代换 $x-au$, 则

$$\int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} dx = 2a \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}} du = 2a B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2a \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = 2a \cdot \frac{1}{2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi a.$$

【4189】 $\iint_{\Omega} \ln \sin(x-y) dx dy$, 其中区域 Ω 是由直线 $y=0, y=x, x=\pi$ 围成的.

解 作变量代换 $x=u+v, y=u-v$, 则 Oxy 平面上的区域 Ω 变为 uv 平面上的区域 Ω' . 显然 Ω' 由直线 $u-v=0, v=0, u+v=\pi$ 所界. 又有 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -2$. 于是, 再注意到被积函数非正, 即有

$$\iint_{\Omega} \ln \sin(x-y) dx dy = 2 \iint_{\Omega'} \ln \sin 2v du dv = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_v^{\pi-v} \ln \sin 2v du$$

$$\begin{aligned}
& -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin 2v dv - 2 \ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) dv + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin v dv + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \cos v dv \\
& = \pi \ln 2 - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin v dv + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \ln \sin t dt = \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin v dv \\
& = \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2\pi \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2 \right) = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

*) 利用 2353 题(1)的结果.

【4190】
$$\iint_{x^2+y^2 \leq r} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

提示 由关于 Ox 轴的对称性与被积函数的非负性,采用极坐标即可获解.

解 由关于 Ox 轴的对称性与被积函数的非负性,采用极坐标,有

$$\iint_{x^2+y^2 \leq r} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq r} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{r}} dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 2.$$

研究下列三重积分的收敛性:

【4191】
$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz, \text{ 其中 } 0 < m \leq |\varphi(x,y,z)| \leq M.$$

解题思路 仿 4161 题, 所给积分与积分 $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$ 同时收敛或同时发散. 注意到

$\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p}$ 是正的, 采用球坐标 $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \cos \psi$, $z = r \sin \psi$, 即可知当 $p > \frac{3}{2}$ 时收敛, 当 $p \leq \frac{3}{2}$ 时发散.

解 由于
$$\frac{m}{(x^2+y^2+z^2)^p} \leq \frac{|\varphi(x,y,z)|}{(x^2+y^2+z^2)^p} \leq \frac{M}{(x^2+y^2+z^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 可知

$$\text{积分 } \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz \quad \text{与} \quad \text{积分 } \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$$

同时收敛或同时发散. 由于被积函数 $\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p}$ 是正的, 采用球坐标 $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \cos \psi$, $z = r \sin \psi$, 得

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-2}} = 4\pi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-2}}.$$

显然, $\int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-2}}$ 当 $p > \frac{3}{2}$ 时收敛, $p \leq \frac{3}{2}$ 时发散; 由此可知, $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz$ 当 $p > \frac{3}{2}$ 时收敛, 当 $p \leq \frac{3}{2}$ 时发散.

【4192】
$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz \quad \text{其中 } 0 < m \leq |\varphi(x,y,z)| \leq M.$$

提示 仿 4191 题, 并采用球坐标.

解 和 4191 题完全类似(请参看 4191 题的解题过程), 易得

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-2}} = 4\pi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-2}}.$$

显然, $\int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-2}}$ 当 $p < \frac{3}{2}$ 时收敛, 当 $p \geq \frac{3}{2}$ 时发散; 故 $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz$ 当 $p < \frac{3}{2}$ 时收敛, 当 $p \geq \frac{3}{2}$ 时发散.

【4193】
$$\iiint_{x+y+z>1} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r} \quad (p>0, q>0, r>0).$$

解 由对称性及被积函数的非负性,有

$$\iiint_{x+y+z>1} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r} - 8 \iiint_{\substack{x>0, y>0, z>0 \\ x+y+z>1}} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r} = 8 \iiint_{\Omega_1} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r} + 8 \iiint_{\Omega_2} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r}.$$

其中,令

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z > 1, x^p + y^q + z^r \leq 3\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z > 1, x^p + y^q + z^r > 3\}.$$

令 $\Omega_3 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^p + y^q + z^r > 3\}$, 由于当 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^p + y^q + z^r > 3$ 时必有 $x+y+z > 1$ (否则, $x+y+z \leq 1$, 就有 $x \leq 1, y \leq 1, z \leq 1$, 从而, $x^p \leq 1, y^q \leq 1, z^r \leq 1$, 于是 $x^p + y^q + z^r \leq 3$), 故 $\Omega_2 = \Omega_3$. 显然, $\iiint_{\Omega_1} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r}$ 为常义积分, 故积分 $\iiint_{x+y+z>1} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}$ 的敛散性取决于 $\iiint_{\Omega_1} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r}$

的敛散性. 对此积分, 作变量代换

$$x = R^{\frac{2}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \varphi \cos^{\frac{2}{r}} \psi, \quad y = R^{\frac{2}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \varphi \cos^{\frac{2}{r}} \psi, \quad z = R^{\frac{2}{r}} \sin^{\frac{2}{r}} \psi.$$

则易知

$$\frac{D(x, y, z)}{D(R, \varphi, \psi)} = \frac{8}{pqr} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 1} \cos^{\frac{2}{p} - 1} \varphi \sin^{\frac{2}{q} - 1} \varphi \sin^{\frac{2}{r} - 1} \psi \cos^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \psi.$$

于是, 由被积函数的非负性, 并利用 3856 题的结果, 得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_1} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r} &= \frac{8}{pqr} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \varphi \cos^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \varphi d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{r} - 1} \psi \cos^{\frac{2}{p} - 1} \psi d\psi \cdot \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3} dR \\ &= \frac{8}{pqr} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3} dR \\ &= \frac{2}{pqr} B\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3} dR. \end{aligned}$$

由于积分 $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3} dR$ 当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3 < -1$ (即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$) 时收敛, 当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3 \geq -1$ 时发散, 故积分 $\iiint_{\Omega_1} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r}$ (从而, 积分 $\iiint_{x+y+z>1} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}$) 当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ 时收敛, 当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$ 时发散.

【4194】
$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p},$$
 其中 $0 < m \leq f(x, y, z) \leq M$, 而 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是闭区间 $[0, a]$ 上的连续函数.

解 由于

$$\frac{m}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p} \leq \frac{f(x, y, z)}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p} \leq \frac{M}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p},$$

并注意广义重积分收敛必绝对收敛, 即知积分

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p}$$

与积分

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p}$$

同时收敛或同时发散. 由被积函数 $\frac{1}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p}$ 的非负性, 我们有

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p} = \int_0^a F(x) dx,$$

其中

$$F(x) = \int_0^a \int_0^a \frac{dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p} \quad (0 \leq x \leq a).$$

作变量代换

$$u = y - \varphi(x), \quad v = z - \psi(x) \quad (x \text{ 固定}),$$

则

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(y, z)}} = 1.$$

从而,有

$$F(x) = \iint_{\substack{\varphi(x) \leq u \leq a \\ \psi(x) \leq v \leq a}} \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^p}. \quad (1)$$

先设 $p < 1$. 令 $c = \max_{0 \leq x \leq a} (|\varphi(x)| + |\psi(x)|)$, 则由(1)式知,

$$0 < F(x) \leq \iint_{\substack{u \leq a-c \\ v \leq a-c}} \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^p} < \iint_{u^2 + v^2 \leq 2(a-c)^2} \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}(a-c)} \frac{dr}{r^{2p-1}} = \frac{\pi}{1-p} [\sqrt{2}(a+c)]^{2-2p},$$

即 $F(x)$ 有界(实际上,仿 4186 题的证明过程还可证明 $F(x)$ 在 $0 \leq x \leq a$ 上连续),从而, $\int_0^a F(x) dx$ 是常义积分,显然收敛.由此可知,此时积分

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p} \quad (2)$$

收敛.

次设 $p \geq 1$, 这时积分(2)可能收敛也可能发散,分两种情况讨论:

(i) 若不存在这样的 $x \in [0, a]$ 使 $0 \leq \varphi(x) \leq a, 0 \leq \psi(x) \leq a$ 同时成立(例如, $\varphi(x)$ 或 $\psi(x)$ 的值完全位于 $[0, a]$ 之外;这时,对一切 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$, 均有:连续函数 $\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p > 0$. 从而,积分(2)收敛(这时是常义积分).

(ii) 若存在这样的点 $x \in [0, a]$ 使 $0 < \varphi(x) < a, 0 < \psi(x) < a$ 同时成立;由 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的连续性,必存在正数 ϵ 及闭区间 $I_0 \subset [0, a]$, 使当 $x \in I_0$ 时,恒有 $\epsilon \leq \varphi(x) \leq a - \epsilon, \epsilon \leq \psi(x) \leq a - \epsilon$,从而由(1)式知:当 $x \in I_0$ 时,有

$$F(x) \geq \iint_{\substack{\epsilon \leq u \leq a-\epsilon \\ \epsilon \leq v \leq a-\epsilon}} \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^p} \geq \iint_{u^2 + v^2 \leq \epsilon^2} \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\epsilon \frac{dr}{r^{2p-1}} = 2\pi \int_0^\epsilon \frac{dr}{r^{2p-1}} = +\infty \quad (\text{注意 } p \geq 1),$$

即当 $x \in I_0$ 时恒有 $F(x) = +\infty$, 由此可知,积分 $\int_0^a F(x) dx$ 发散. 于是,积分(2)发散.

综上所述,可知:积分

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p}$$

当 $p < 1$ 时收敛;当 $p \geq 1$ 时,若不存在 $x \in [0, a]$ 使 $0 \leq \varphi(x) \leq a, 0 \leq \psi(x) \leq a$, 则收敛;若存在 $x \in [0, a]$, 使 $0 < \varphi(x) < a, 0 < \psi(x) < a$, 则发散.

【4195】
$$\iiint_{\substack{x \leq 1 \\ y \leq 1 \\ z \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x + y - z|^p}.$$

解 我们有(注意被积函数的非负性)

$$\begin{aligned} \iiint_{\substack{x \leq 1 \\ y \leq 1 \\ z \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x + y - z|^p} &= 2 \iiint_{\substack{x \leq 1, y \leq 1, z \leq 1 \\ x+y-z \geq 0}} \frac{dx dy dz}{(x + y - z)^p} \\ &= 2 \iiint_{\substack{x \leq 1, y \leq 1 \\ 1 < x+y \leq 1}} dx dy \int_1^{x+y} \frac{dz}{(x + y - z)^p} + 2 \iiint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ x+y \geq 1}} dx dy \int_1^1 \frac{dz}{(x + y - z)^p} = 2I_1 + 2I_2, \end{aligned}$$

其中 I_1 表第一个积分, I_2 表第二个积分.

若 $p < 1$, 则

$$\int_1^{x+y} \frac{dz}{(x + y - z)^p} = \frac{(x + y + 1)^{1-p}}{1-p},$$

$$\int_1^1 \frac{dz}{(x+y-z)^p} = \frac{(x+y+1)^{1-p} - (x+y-1)^{1-p}}{1-p} \quad (x+y \geq 1),$$

故
$$I_1 = \frac{1}{1-p} \iint_{\substack{x \leq 1, y \leq 1 \\ 1 < x+y \leq 1}} (x+y+1)^{1-p} dx dy,$$

$$I_2 = \frac{1}{1-p} \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ x+y \geq 1}} [(x+y+1)^{1-p} - (x+y-1)^{1-p}] dx dy.$$

显然, I_1 与 I_2 均为常义(二重)积分, 当然收敛. 因此, 当 $p < 1$ 时, 积分 $\iiint_{\substack{x \leq 1 \\ y \leq 1 \\ z \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p}$ 收敛.

若 $p \geq 1$, 则当 $x+y > 1$ 时, $\int_1^{x+y} \frac{dz}{x+y-z|^p} = +\infty$, 故 $I_1 = +\infty$, 又显然有 $I_2 > 0$, 故此时积分

$$\iiint_{\substack{x \leq 1 \\ y \leq 1 \\ z \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p} \text{ 发散.}$$

计算下列积分:

【4196】 $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r}.$

解 由于被积函数非负, 故

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \int_0^1 \frac{dy}{y^q} \int_0^1 \frac{dz}{z^r} = \frac{1}{(1-p)(1-q)(1-r)} \quad (\text{若 } p < 1, q < 1, r < 1).$$

注意, 若 $p \geq 1$ 或 $q \geq 1$ 或 $r \geq 1$, 则 $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r} = +\infty$.

【4197】 $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$

提示 注意到被积函数非负, 采用球坐标即可获解.

解 采用球坐标, 由于被积函数的非负性, 有

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_0^1 \frac{dr}{r^1} = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

【4198】 $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}.$

解 采用球坐标, 由于被积函数的非负性, 有

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_0^1 \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr = 4\pi \int_0^1 \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr.$$

作代换 $t = r^2$, 则当 $p < 1$ 时, 有

$$\int_0^1 \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{-p} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{2}, 1-p\right).$$

从而, 当 $p < 1$ 时, 有

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p} = 2\pi B\left(\frac{3}{2}, 1-p\right).$$

注意, 若 $p \geq 1$, 则 $\int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{-p} dt = +\infty$, 故此时

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p} = +\infty.$$

【4199】 $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz.$

解 采用球坐标, 由被积函数的非负性, 有

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr = 4\pi \int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr.$$

作代换 $r^2 = t$, 则 $\int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

于是, $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = \pi^{\frac{3}{2}}$.

【4200】 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3,$$

其中 $P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$, $(a_{ij} = a_{ji})$ 为正定二次型.

解 用 A 表矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

由于二次型 $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$ 是正定的, 故由高等代数中关于二次型的理论知: 存在正交矩阵

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

使

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$; 也即在线性(正交)变换

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2 + b_{13}x'_3 \\ x_2 = b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2 + b_{23}x'_3 \\ x_3 = b_{31}x'_1 + b_{32}x'_2 + b_{33}x'_3 \end{cases} \quad (3)$$

之下, 二次型 $P(x_1, x_2, x_3)$ 化为平方和:

$$P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2. \quad (4)$$

注意, 由于 B 是正交矩阵, 故 $B^{-1} = B'$ (B' 表 B 的转置矩阵), 从而, $|B| = |b_{ij}| = \pm 1$. 显然,

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(x'_1, x'_2, x'_3)} = |b_{ij}| = \pm 1.$$

由(4)式, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 x_1'^2 - \lambda_2 x_2'^2 - \lambda_3 x_3'^2} dx'_1 dx'_2 dx'_3. \quad (5)$$

再作变量代换 $x'_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} u_1, x'_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} u_2, x'_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} u_3$, 则 $\frac{D(x'_1, x'_2, x'_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}}$. 于是(注意 4199 题的结果),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 x_1'^2 - \lambda_2 x_2'^2 - \lambda_3 x_3'^2} dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)} du_1 du_2 du_3 = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}}. \quad (6)$$

但由(2)式知(记 $\Delta = |a_{ij}| = |A|$, 注意, 由于 $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$ 是正定的, 故 $\Delta > 0$)

$$\Delta = |A| = |B^{-1}| \cdot |A| \cdot |B| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (7)$$

于是, 根据(5)、(6)、(7)诸式, 最后得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 = \sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}.$$

§ 10. 多重积分

1° 多重积分的直接算法 若函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在由下列不等式确定的有界区域 Ω 内是连续的:

$$\begin{cases} x'_1 \leq x_1 \leq x''_1, \\ x'_2(x_1) \leq x_2 \leq x''_2(x_1) \\ \vdots \\ x'_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq x''_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \end{cases}$$

其中 x'_1 和 x''_1 为常数, $x'_2(x_1), x''_2(x_1), \dots, x'_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x''_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ 为连续函数, 则相应的多重积分可按下列公式来计算:

$$\int_a^b \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_{x'_1}^{x''_1} dx_1 \int_{x'_2(x_1)}^{x''_2(x_1)} dx_2 \cdots \int_{x'_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{x''_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n.$$

2° 多重积分中的变量代换 若

1) 函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在有界可测区域 Ω 内是一致连续的;

2) 连续可微函数 $x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ($i=1, 2, \dots, n$), 把 Ox_1, x_2, \dots, x_n 空间内的区域 Ω 一一映射成 $O'\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 空间内的有界区域 Ω' ;

3) 在区域 Ω' 内雅可比行列式 $I = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} \neq 0$,

则成立公式

$$\int_a^b \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_{\Omega'} \cdots \int f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) |I| d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n.$$

特别是, 根据公式

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1, \\ x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ x_n &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} \end{aligned}$$

变换成极坐标 $(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$ 时, 有

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2}.$$

【4201】 设 $K(x, y)$ 为区域 $R[a \leq x \leq b, a \leq y \leq b]$ 内的连续函数, 且

$$K_n(x, y) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_n, y) dt_1 dt_2 \cdots dt_n,$$

证明:

$$K_{n+m+1}(x, y) = \int_a^b K_n(x, t) K_m(t, y) dt.$$

证

$$\begin{aligned} & K_{n+m+1}(x, y) \\ &= \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_n, t) K(t, z_1) K(z_1, z_2) \cdots K(z_m, y) dt_1 dt_2 \cdots dt_n dt dz_1 dz_2 \cdots dz_m \\ &= \int_a^b \left\{ \left[\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_n, t) dt_1 dt_2 \cdots dt_n \right] \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(t, z_1) K(z_1, z_2) \cdots K(z_m, y) dz_1 dz_2 \cdots dz_m \right] \right\} dt \\ &= \int_a^b K_n(x, t) K_m(t, y) dt. \end{aligned}$$

【4202】 设 $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为区域 $0 \leq x_i \leq 1$ ($i=1, 2, \dots, n$) 内的连续函数, 证明等式:

$$\int_0^t dx_1 \int_0^{t_1} dx_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f dx_n - \int_0^t dx_n \int_{t_n}^t dx_{n-1} \cdots \int_{t_2}^t f dx_1 \quad (n \geq 2).$$

证 考虑下面三个有界闭区域:

$$\Omega = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_i \leq x, i=1, 2, \dots, n \},$$

$$\Omega_1 = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_1 \leq x, 0 \leq x_2 \leq x_1, \dots, 0 \leq x_n \leq x_{n-1} \},$$

$$\Omega_2 = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_n \leq x, x_n \leq x_{n-1} \leq x, \dots, x_2 \leq x_1 \leq x \}.$$

由假定 $f(x_1, \dots, x_n)$ 在区域 Ω 上连续, 显然, $\Omega_1 \subset \Omega, \Omega_2 \subset \Omega$, 故 $f(x_1, \dots, x_n)$ 在 Ω_1 与 Ω_2 上连续. 根据化 n 重积分为累次积分的公式, 我们有

$$\iint_{\Omega_1} \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n = \int_0^t dx_1 \int_0^{t_1} dx_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f dx_n, \quad (1)$$

$$\iint_{\Omega_2} \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n = \int_0^t dx_n \int_{t_n}^t dx_{n-1} \cdots \int_{t_2}^t f dx_1. \quad (2)$$

下证 $\Omega_1 = \Omega_2$, 事实上, 若 $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_1$, 则

$$0 \leq x_1 \leq x, 0 \leq x_2 \leq x_1, \dots, 0 \leq x_n \leq x_{n-1}, \quad (3)$$

从而,

$$0 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq x_{n-2} \leq \cdots \leq x_2 \leq x_1 \leq x. \quad (4)$$

于是,

$$0 \leq x_n \leq x, x_n \leq x_{n-1} \leq x, \dots, x_2 \leq x_1 \leq x. \quad (5)$$

由此可知 $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_2$. 反之, 若 $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_2$, 则(5)式成立. 从而, (4)式显然成立. 由此又知(3)式成立, 故 $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_1$, 于是, $\Omega_1 = \Omega_2$ 获证. 由此, 再根据(1)式与(2)式, 即得

$$\int_0^t dx_1 \int_0^{t_1} dx_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f dx_n = \int_0^t dx_n \int_{t_n}^t dx_{n-1} \cdots \int_{t_2}^t f dx_1.$$

证毕.

【4203】 证明: $\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n = \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^n$, 其中 f 为连续函数.

提示 利用数学归纳法.

证 证法 1:

$$\begin{aligned} \text{我们有} \quad & \int_0^{t_1} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n \\ &= \int_0^{t_1} f(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n. \end{aligned}$$

令 $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$. 由于 f 是连续函数, 故 $F'(s) = f(s)$. 我们有 (注意到 $F(0) = 0$)

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n - \int_0^{t_{n-2}} F(t_{n-1}) f(t_{n-1}) dt_{n-1} = \int_0^{t_{n-2}} F(t_{n-1}) F'(t_{n-1}) dt_{n-1} \\ &= \frac{1}{2} [F(t_{n-1})]^2 \Big|_{t_{n-1}=0}^{t_{n-1}=t_{n-2}} = \frac{1}{2} [F(t_{n-2})]^2, \end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_{n-3}} f(t_{n-2}) dt_{n-2} \int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \int_0^{t_{n-3}} \frac{1}{2} [F(t_{n-2})]^2 F'(t_{n-2}) dt_{n-2} \\ &= \frac{1}{3!} [F(t_{n-1})]^3, \end{aligned}$$

⋮

这样继续下去, 显然有

$$\int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)!} [F(t_1)]^{n-1}.$$

$$\text{于是,} \quad \int_0^t f(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} [F(t_1)]^{n-1} f(t_1) dt_1$$

$$-\frac{1}{(n-1)!} \int_0^t [F(t_1)]^{n-1} F'(t_1) dt_1 - \frac{1}{n!} [F(t)]^n = \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^n.$$

从而,
$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n = \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^n.$$

证毕.

证法 2:

用数学归纳法证明所述公式. 当 $n=1$ 时此公式显然成立. 今设 $n=k$ 时公式成立, 要证 $n=k+1$ 时公式也成立. 我们有

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_{k+1}) dt_{k+1} = \int_0^t f(t_1) \left[\int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_2) \cdots f(t_{k+1}) dt_{k+1} \right] dt_1.$$

由于假定公式当 $n=k$ 时成立, 故

$$\int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_2) \cdots f(t_{k+1}) dt_{k+1} = \frac{1}{k!} \left\{ \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau \right\}^k.$$

从而 (令 $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$, 则 $F'(s) = f(s)$),

$$\begin{aligned} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_{k+1}) dt_{k+1} &= \int_0^t f(t_1) \cdot \frac{1}{k!} \left\{ \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau \right\}^k dt_1 = \frac{1}{k!} \int_0^t [F(t_1)]^k F'(t_1) dt_1 \\ &= \frac{1}{(k+1)!} [F(t)]^{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^{k+1}, \end{aligned}$$

因此, 所述公式当 $n=k+1$ 时成立. 于是, 由数学归纳法知, 所述公式对一切正整数 n 均成立. 证毕.

计算下列多重积分:

【4204】 (1) $\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 dx_2 \cdots dx_n;$

(2) $\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$

提示 (1) 化成累次积分即可获解;

(2) 将被积函数展开, 化成累次积分并利用本题(1)的结果.

解 (1)
$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 dx_2 \cdots dx_n &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_n \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + \frac{1}{3} \right) dx_{n-1} \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) dx_{n-2} \\ &= \cdots = \frac{n}{3}. \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 [(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \cdots + x_2 x_n + x_3 x_4 \\ &\quad + \cdots + x_3 x_n + \cdots + x_{n-1} x_n)] dx_n \\ &= \frac{n}{3} + 2 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 [(x_1 x_2 + \cdots + x_1 x_n) + (x_2 x_3 + \cdots + x_2 x_n) + \cdots + x_{n-1} x_n] dx_n \\ &= \frac{n}{3} + 2 \left(\frac{n-1}{4} + \frac{n-2}{4} + \cdots + \frac{1}{4} \right) = \frac{n(3n+1)}{12}. \end{aligned}$$

*) 利用本题(1)的结果.

【4205】
$$I_n = \iiint_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq a}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

解 解法 1:

化为累次积分, 有 $I_n = \int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} dx_n$,

我们又知

$$\begin{aligned} & \int_0^a x_1 \cdots x_{n-2} dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} dx_n = \int_0^a x_1 \cdots x_{n-2} (a - x_1 - \cdots - x_{n-2} - x_{n-1}) dx_{n-1} \\ &= -\frac{1}{2} (a - x_1 - \cdots - x_{n-2} - x_{n-1})^2 \Big|_{x_{n-1}=0}^{x_{n-1}=a-x_1-\cdots-x_{n-2}} = \frac{1}{2} (a - x_1 - \cdots - x_{n-2})^2, \\ & \int_0^a x_1 \cdots x_{n-3} dx_{n-2} \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} dx_n = \int_0^a x_1 \cdots x_{n-3} \frac{1}{2} (a - x_1 - \cdots - x_{n-2})^2 dx_{n-2} \\ &= \frac{1}{3!} (a - x_1 - \cdots - x_{n-3})^3, \\ & \vdots \end{aligned}$$

这样继续下去, 显然有

$$\int_0^a x_1 \cdots x_{n-2} dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} dx_n = \frac{1}{(n-1)!} (a - x_1)^{n-1}.$$

于是,

$$I_n = \int_0^a \frac{1}{(n-1)!} (a - x_1)^{n-1} dx_1 = \frac{a^n}{n!}.$$

解法 2:

我们有

$$I_n = \int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} dx_n.$$

在右端的逐次积分中作代换:

$$x_1 = a\xi_1, x_2 = a\xi_2, \cdots, x_n = a\xi_n,$$

即得

$$I_n = a^n \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \cdots \int_0^{\xi_{n-1}} d\xi_n = a^n \int_{\substack{\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \cdots, \xi_n \geq 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \leq 1}} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n = a^n I_n(1),$$

其中 $I_n(1)$ 表示当 $a=1$ 时积分 I_n 的值.

另一方面, 我们有

$$I_n(1) = \int_0^1 d\xi_n \int_{\substack{\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \cdots, \xi_n \geq 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n-1} \leq 1 - \xi_n}} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_{n-1} = I_{n-1}(1) \int_0^1 (1 - \xi_n)^{n-1} d\xi_n = \frac{I_{n-1}(1)}{n}.$$

反复运用上述循环公式, 可得

$$I_n(1) = \frac{1}{n!},$$

于是, 最后得 $I_n = \frac{a^n}{n!}$.

【4206】 $\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \cdots x_n dx_n.$

提示 化成累次积分或利用 4203 题的结果, 均可获解.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \cdots x_n dx_n = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} \frac{1}{2} x_1 x_2 \cdots x_{n-1}^3 dx_{n-1} \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-3}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x_1 x_2 \cdots x_{n-2}^5 dx_{n-2} \\ &= \cdots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{2(n-1)} \int_0^1 x_1^{2n-1} dx_1 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{1}{2^n n!}. \end{aligned}$$

*) 也可利用 4203 题的结果直接得

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \cdots x_n dx_n = \frac{1}{n!} \left(\int_0^1 \tau d\tau \right)^n = \frac{1}{2^n n!}.$$

【4207】 $\int_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1}} \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$

解 作代换

$$x_1 = u_1(1 - u_2),$$

$$\begin{aligned}x_2 &= u_1 u_2 (1 - u_3) \\&\vdots \\x_{n-1} &= u_1 u_2 \cdots u_{n-1} (1 - u_n), \\x_n &= u_1 u_2 \cdots u_n,\end{aligned}$$

则由 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$ 知 $0 \leq u_i \leq 1 (i=1, 2, \dots, n)$, 且有

$$I = \begin{vmatrix} 1-u_2 & u_2(1-u_3) & \cdots & u_2 u_3 \cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_2 u_3 \cdots u_n \\ -u_1 & u_1(1-u_3) & \cdots & u_1 u_3 \cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_1 u_3 \cdots u_n \\ 0 & u_1 u_2 & & & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_1 u_2 \cdots u_{n-2}(1-u_n) & u_1 \cdots u_{n-2} u_n \\ 0 & 0 & \cdots & u_1 \cdots u_{n-1} & u_1 \cdots u_n \end{vmatrix}$$

如在每一列的元素上加上所有以后各列相应的元素, 则在对角线下面的全部元素都等于零, 而在对角线上的元素就等于 $1, u_1, u_1 u_2, \dots, u_1 \cdots u_{n-1}$. 因此, 得

$$I = u_1^{n-1} u_2^{n-2} \cdots u_{n-1}.$$

于是, 最后得

$$\begin{aligned}& \iint_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} \cdots \int \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 u_1^{n-\frac{1}{2}} u_2^{n-2} \cdots u_{n-1} du_1 du_2 \cdots du_{n-1} du_n \\&= \frac{2}{(n-1)!(2n+1)}.\end{aligned}$$

【4208】 求以平面 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \pm h_i (i=1, 2, \dots, n)$

为界的 n 维平行 $2n$ 面体的体积, 这里设 $\Delta = |a_{ij}| \neq 0$.

解 令 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \xi_i (i=1, 2, \dots, n)$, 即得 $2n$ 面体的体积

$$V = \int_{h_1}^{h_1} \int_{h_2}^{h_2} \cdots \int_{h_n}^{h_n} \frac{1}{|\Delta|} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n = \frac{2^n h_1 \cdots h_n}{|\Delta|}.$$

【4209】 求 n 维角锥 $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1, x_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n) (a_i > 0, i=1, 2, \dots, n)$ 的体积.

提示 令 $x_i = a_i \xi_i (i=1, 2, \dots, n)$, 并利用 4205 题的结果.

解 令 $x_i = a_i \xi_i (i=1, 2, \dots, n)$, 即得体积

$$V = a_1 a_2 \cdots a_n \iint_{\substack{\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \dots, \xi_n \geq 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \leq 1}} \cdots \int d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!}.$$

*) 利用 4205 题的结果.

【4210】 求以曲面 $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$ 为界的 n 维圆锥的体积.

解 作代换

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 r \cos \varphi_1, \\x_2 &= a_2 r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\&\vdots \\x_{n-2} &= a_{n-2} r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-3} \cos \varphi_{n-2}, \\x_{n-1} &= a_{n-1} r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-3} \sin \varphi_{n-2}, \\x_n &= a_n x'_n,\end{aligned}$$

则域 V 为

$$0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi_1 \leq \pi, 0 \leq \varphi_2 \leq \pi, \dots, 0 \leq \varphi_{n-3} \leq \pi, 0 \leq \varphi_{n-2} \leq 2\pi, r \leq x'_n \leq 1,$$

并且

$$|I| = a_1 a_2 \cdots a_n r^{n-2} \sin^{n-3} \varphi_1 \sin^{n-4} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-3}.$$

于是,所求的体积为

$$\begin{aligned}
 V &= a_1 a_2 \cdots a_n \int_0^1 r^{n-2} dr \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_1 d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin \varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-2} \int_r^1 dr' \\
 &= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_1 d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin \varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \\
 &= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-3} \varphi_1 d\varphi_1 \cdots 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \\
 &= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} B\left(\frac{n-2}{2}, \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{n-3}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdots B\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\
 &= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \\
 &= \frac{a_1 a_2 \cdots a_n \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cdot \frac{1}{\frac{n-1}{2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} a_1 a_2 \cdots a_n.
 \end{aligned}$$

*) 利用等式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1} \varphi d\varphi$ ($a > 0$), 即得

$$\int_0^\pi \sin^{a-1} \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^{a-1} \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1} \varphi d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi d\varphi.$$

* *) 利用 3856 题的结果.

【4211】 求 n 维球体 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq a^2$ 的体积.

解 令 $x_i = a\xi_i$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), 即得体积

$$V_n = \iiint_{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 \leq 1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = a^n V_n(1).$$

其中 $V_n(1)$ 表示 $a=1$ 时的 n 维球体的体积. 但是

$$\begin{aligned}
 V_n(1) &= \iiint_{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 \leq 1} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n = \int_1^1 d\xi_n \iiint_{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 \leq 1 - \xi_n^2} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_{n-1} \\
 &= V_{n-1}(1) \int_1^1 (1 - \xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi_n = 2V_{n-1}(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi d\varphi \\
 &= 2V_{n-1}(1) \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} = V_{n-1}(1) \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)},
 \end{aligned}$$

因为 $V_1(1) = 2$, 故由上述循环公式可得 $V_n(1) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$.

因此, 所求的体积为

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} a^n.$$

对于 n 为偶数及奇数, 分别可得公式

$$V_{2m} = \frac{\pi^m}{m!} a^{2m}, \quad V_{2m+1} = \frac{2 \cdot (2\pi)^m}{(2m+1)!!} a^{2m+1}.$$

特别是, 对于 V_1, V_2, V_3 可求得熟知的值: $2a, \pi a^2, \frac{4}{3} \pi a^3$.

【4212】 求 $\iiint_{\Omega} \cdots \int x_n^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n$, 其中区域 Ω 是由下列不等式确定的:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq a^2, \quad -\frac{h}{2} \leq x_n \leq \frac{h}{2}.$$

提示 利用 4211 题的结果.

解 $\iiint_{\Omega} \cdots \int x_n^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_n^2 dx_n \cdot \iiint_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq a^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} = \frac{h^3}{12} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} a^{n-1}.$

*) 利用 4211 题的结果.

【4213】 计算 $\iiint_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}}.$

提示 利用 4211 题的结果.

解 $\iiint_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}}$
 $= \iiint_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} \int \frac{\sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2}}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}} dx_n$
 $= \pi \cdot \iiint_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} = \pi \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$

*) 利用 4211 题的结果.

【4214】 证明等式: $\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} du.$

提示 利用 4202 题的结果.

证 $\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n$
 $= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \cdots \int_{x_2}^x dx_1 = \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \cdots \int_{x_3}^x (x - x_2) dx_2$
 $= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \cdots \int_{x_4}^x \frac{1}{2} (x - x_3)^2 dx_3$
 $= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \cdots \int_{x_5}^x \frac{1}{2 \cdot 3} (x - x_4)^3 dx_4$
 \cdots
 $= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x \frac{1}{(n-2)!} (x - x_{n-1})^{n-2} dx_{n-1} = \int_0^x \frac{(x - x_n)^{n-1}}{(n-1)!} f(x_n) dx_n.$

在上述积分中, 将 x_n 代之以 u , 不影响积分的值, 故得

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} du.$$

*) 利用 4202 题的结果.

【4215】 证明等式: $\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_{n+1}) dx_{n+1} = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u) du.$

证 利用 4202 题的结果, 即得

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_{n+1}) dx_{n+1} = \int_0^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1} dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^x x_1 dx_1$$

$$= \int_0^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1} dx_{n-1} \cdots \int_{x_3}^x \frac{1}{2} (x^2 - x_2^2) x_2 dx_2$$

$$= \int_0^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1} dx_{n-1} \cdots \int_{x_4}^x \frac{1}{2^2 \cdot 2} (x^2 - x_3^2)^2 x_3 dx_3$$

— …

$$\int_0^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} (x^2 - x_n^2)^n \cdot x_n dx_n = \int_0^x \frac{1}{2^n n!} f(x_{n+1}) (x^2 - x_n^2)^n dx_n \dots$$

在上述积分中, 将 x_{n+1} 代之以 u , 不影响积分的值, 故得

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_{x_1}^x x_2 dx_2 \cdots \int_{x_n}^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u) du.$$

【4216】 证明狄利克雷公式:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)} \quad (p_1, p_2, \dots, p_n > 0).$$

$\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \\ x_1+x_2+\dots+x_n \leq 1 \end{matrix}$

提示 用数学归纳法证明.

证 我们应用数学归纳法证明之.

当 $n=1$ 时, 公式显然成立, 即 $\int_0^1 x_1^{p_1-1} dx_1 = \frac{1}{p_1} = \frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+1)}.$

其次, 设公式对 $n-1$ 成立, 今证公式对 n 也成立. 为此, 将公式左端写为

$$\int_0^1 x_n^{p_n-1} dx_n \int_0^{1-x_n} \cdots \int_0^{1-x_n} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}.$$

$\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n-1} > 0 \\ x_1+x_2+\dots+x_{n-1} \leq 1-x_n \end{matrix}$

在里面的 $n-1$ 重积分中作代换

$$x_1 = (1-x_n)\xi_1, x_2 = (1-x_n)\xi_2, \dots, x_{n-1} = (1-x_n)\xi_{n-1},$$

即得

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1)} \int_0^1 x_n^{p_n-1} (1-x_n)^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}} dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)} B(p_n, p_1+\cdots+p_{n-1}+1) \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)} \cdot \frac{\Gamma(p_n)\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+1)} \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}. \end{aligned}$$

这样一来, 我们得知公式对 n 重积分也正确. 从而, 对 n 为任意的正整数时, 狄利克雷公式均成立.

【4217】 证明刘维耳公式:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1+x_2+\cdots+x_n) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ & \quad \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \\ x_1+x_2+\dots+x_n \leq 1 \end{matrix} \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)} \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1} du \quad (p_1, p_2, \dots, p_n > 0), \end{aligned}$$

式中 $f(u)$ 为连续函数.

提示 用数学归纳法证明.

证 我们应用数学归纳法证明之.

当 $n=1$ 时, 公式显然成立. 当 $n=2$ 时, 公式也成立, 即

$$\int_0^1 \int_0^{1-x_1} f(x_1+x_2) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} dx_1 dx_2 = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)} \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2-1} du.$$

$\begin{matrix} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1+x_2 \leq 1 \end{matrix}$

事实上, 令 Ω 表区域: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1+x_2 \leq 1$. 作代换 $x_1 = \xi_1, x_1+x_2 = \xi_2$, 及 $t = \frac{\xi_1}{\xi_2}$,

则有 $\iint_{\Omega} f(x_1+x_2) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} dx_1 dx_2 = \int_0^1 f(\xi_2) d\xi_2 \int_0^{\xi_2} \xi_1^{p_1-1} (\xi_2 - \xi_1)^{p_2-1} d\xi_1$

$$= \int_0^1 f(\xi_2) d\xi_2 \int_0^1 t^{p_1-1} (1-t)^{p_2-1} \xi_2^{p_1+p_2-1} dt = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)} \int_0^1 f(\xi_2) \xi_2^{p_1+p_2-1} d\xi_2$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)} \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2-1} du.$$

其次, 设公式对于 $n-1$ 成立, 今证对于 n 公式也成立. 为此, 将公式左端写为

$$\int_{\substack{t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0 \\ t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} \leq 1}} \dots \int_0^{t_1+t_2+\dots+t_{n-1}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_{n-1}^{p_{n-1}-1} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \int_0^{t_1+t_2+\dots+t_{n-1}} f(x_1+x_2+\dots+x_n) x_n^{p_n-1} dx_n.$$

令

$$\psi(t) = \int_0^t f(t+x_n) x_n^{p_n-1} dx_n.$$

代入上式, 并利用公式对 $n-1$ 成立的假定, 得知上式为

$$\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\dots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_{n-1})} \int_0^1 \psi(t) t^{p_1+p_2+\dots+p_{n-1}-1} dt.$$

利用上面已证的 $n-2$ 时的公式, 于是即得

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0 \\ t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} \leq 1}} \dots \int_0^{t_1+t_2+\dots+t_{n-1}} f(x_1+x_2+\dots+x_n) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\dots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_{n-1})} \int_0^1 dt \int_0^t f(t+x_n) t^{p_1+p_2+\dots+p_{n-1}-1} x_n^{p_n-1} dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\dots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_{n-1})} \int_{\substack{t, t_n \geq 0 \\ t+t_n \leq 1}} f(t+x_n) t^{p_1+p_2+\dots+p_{n-1}-1} x_n^{p_n-1} dt dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\dots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_{n-1})} \cdot \frac{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_{n-1})\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_n)} \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2+\dots+p_n-1} du \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\dots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_n)} \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2+\dots+p_n-1} du, \end{aligned}$$

即公式对于 n 成立. 从而, 公式对于 n 为任意正整数均成立.

【4218】 将区域 $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 \leq R^2$ 上的 n 重积分 ($n \geq 2$)

$$\int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

化为 n -重积分, 其中 $f(u)$ 为连续函数.

解 作代换

$$\begin{aligned} x_1 &= Rr \cos \varphi, \\ x_2 &= Rr \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= Rr \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ x_n &= Rr \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}, \\ I &= R^n r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2}. \end{aligned}$$

则有

于是,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= R^n \int_0^1 r^{n-1} f(Rr) dr \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_2 d\varphi_2 \dots \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1} \\ &= 2\pi R^n \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \dots \frac{\Gamma(\frac{2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^1 r^{n-1} f(Rr) dr \\ &= R^n \frac{2\pi \cdot \pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 r^{n-1} f(Rr) dr = R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 (r^2)^{\frac{n}{2}-1} f(Rr) d(r^2) \\ &= R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 u^{\frac{n}{2}-1} f(R\sqrt{u}) du. \end{aligned}$$

*) 参考 4210 题的计算过程.

【4219】 计算半径为 R , 密度为 ρ_0 的均质球对自身的引力势, 即求积分

$$u = \frac{\rho_0^2}{2} \iiint_{\substack{r_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2 \\ r_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \leq R^2}} \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}},$$

式中 $r_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

解 我们有
$$u = \frac{\rho_0^2}{2} \iiint_{r_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2} dx_1 dy_1 dz_1 \iiint_{r_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \leq R^2} \frac{dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}}.$$

由 4155 题的结果可知

$$\iiint_{r_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \leq R^2} \frac{dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}} = 2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r_1^2,$$

其中 $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. 于是 (利用球坐标),

$$\begin{aligned} u &= \frac{\rho_0^2}{2} \iiint_{r_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2} \left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r_1^2 \right) dx_1 dy_1 dz_1 = \frac{\rho_0}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_0^R \left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r^2 \right) r^2 dr \\ &= \frac{16}{15} \pi^2 \rho_0^2 R^5. \end{aligned}$$

【4220】 设 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) 为正定二次型, 计算 n 重积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \right\}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

解 作变量代换

$$x_i = y_i + \alpha_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad (1)$$

其中诸常数 α_i 以下再确定. 于是, 易得 (注意到 $a_{ij} = a_{ji}$)

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j + 2 \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \right) + b_i \right] y_i + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \alpha_i \alpha_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i + c. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ 是正定形, 故必有 $\delta - |a_{ij}| > 0$, 从而, 线性方程组

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j + b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (2)$$

有唯一的一组解 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 今取变换 (1) 式中的诸 α_i 即为方程组 (2) 的解. 于是,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j + c', \quad (3)$$

其中

$$c' = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \right) \alpha_i + 2 \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i + c = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i + 2 \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i + c = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i + c. \quad (4)$$

下面我们用诸 a_{ij} 和 b_i 及 c 来表示 c' , 令

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & c \end{vmatrix}$$

($n+1$ 阶行列式, 即 $|a_{ij}|$ 的加边行列式). 将此行列式的第一列乘上 α_1 , 第二列乘上 α_2, \cdots , 第 n 列乘上 α_n 加到第 $n+1$ 列上去, 并注意到 (2) 式与 (4) 式, 得

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{ij} & \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j + b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \sum_{j=1}^n b_j \alpha_j + c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & c' \end{vmatrix} = c' |a_{ij}| = c' \delta,$$

故
$$c' = \frac{\Delta}{\delta}. \quad (5)$$

由于 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j$ 是正定二次型,故由高等代数中二次型的理论知,存在正交矩阵

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

使在线性变换

$$y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} z_j \quad (i=1,2,\cdots,n) \quad (6)$$

下,二次型变为平方和:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2, \quad (7)$$

其中 $\lambda_i > 0 (i=1,2,\cdots,n)$; 也即

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中 $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. 由于 P 为正交矩阵,故 $P^{-1} = P'$ (P' 表 P 的转置矩阵),且 $|P| = |p_{ij}| = \pm 1$.

由(8)式又知

$$\delta = |a_{ij}| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n. \quad (9)$$

根据(1)式与(6)式,可知

$$\frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{D(y_1, \cdots, y_n)} = 1, \quad \frac{D(y_1, \cdots, y_n)}{D(z_1, \cdots, z_n)} = |p_{ij}| = |P| = \pm 1.$$

于是,利用广义 n 重积分的变量代换公式,并注意到被积函数的非负性,得(注意(3)式、(5)式与(7)式)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \right\}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j + c' \right\}} \left| \frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{D(y_1, \cdots, y_n)} \right| dy_1 dy_2 \cdots dy_n \\ &= e^{\frac{\Delta}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j \right\}} dy_1 dy_2 \cdots dy_n \\ &= e^{\frac{\Delta}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2 \right\}} \left| \frac{D(y_1, \cdots, y_n)}{D(z_1, \cdots, z_n)} \right| dz_1 dz_2 \cdots dz_n \\ &= e^{\frac{\Delta}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2} dz_1 dz_2 \cdots dz_n \\ &= e^{\frac{\Delta}{\delta}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_1 z_1^2} dz_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_2 z_2^2} dz_2 \right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_n z_n^2} dz_n \right). \end{aligned}$$

作代换 $z_i = \frac{u}{\sqrt{\lambda_i}}$ (i 固定),得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_i z_i^2} dz_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\lambda_i}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_i}} \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

以此代入上式,并注意到(9)式,最后得

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 \right\}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = e^{\frac{\Delta}{\delta}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}} e^{\frac{\Delta}{\delta}}.$$

§ 11. 曲线积分

1° 第一型曲线积分 若函数 $f(x, y, z)$ 在平滑曲线 C

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

的各点上有定义并且连续, ds 为弧长的微分, 则

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^T f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

这个积分的特征在于它与曲线 C 的方向无关.

2° 第一型曲线积分在力学上的应用 若 $\rho = \rho(x, y, z)$ 为曲线 C 在点 (x, y, z) 的线密度, 则曲线 C 的质量等于:

$$M = \int_C \rho(x, y, z) ds.$$

此曲线的质心坐标 (x_0, y_0, z_0) 由以下公式来表示:

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_C x \rho(x, y, z) ds, \quad y_0 = \frac{1}{M} \int_C y \rho(x, y, z) ds, \quad z_0 = \frac{1}{M} \int_C z \rho(x, y, z) ds.$$

3° 第二型曲线积分 若函数 $P=P(x, y, z), Q=Q(x, y, z), R=R(x, y, z)$ 在曲线(1)上的各点是连续的, 且曲线的方向是使参数 t 增加的方向, 则

$$\begin{aligned} & \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \int_{t_0}^T \{ P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)] y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)] z'(t) \} dt. \end{aligned} \quad (2)$$

当沿曲线 C 的方向变更时, 此积分的符号也变更. 在力学上积分(2)是当其作用点描绘出曲线 C 时变力 $\{P, Q, R\}$ 所作的功.

4° 全微分的情形 若

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = du,$$

式中 $u=u(x, y, z)$ 为区域 V 内的单值函数, 则积分值与完全位于区域 V 内的曲线 C 的形状无关:

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1),$$

式中 (x_1, y_1, z_1) 为积分路径的始点, (x_2, y_2, z_2) 为其终点. 最简单的情况下, 若区域 V 是单联通的, 而函数 P, Q, R 有连续的一阶偏导数, 则上式成立的充分必要条件为: 在区域 V 内, 下列条件恒满足:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

这时, 在区域 V 是标准长方体这种简单情形下, 函数 u 可按下面的公式来求得

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x_0, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y_0, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z_0) dz + c,$$

其中 (x_0, y_0, z_0) 为区域 V 内某一点固定的点, 而 c 是任意常数.

计算下列第一型曲线积分:

【4221】 $\int_C (x+y) ds$, 其中 C 为以 $O(0,0), A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ 为顶点的三角形围线.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_C (x+y) ds = \int_{OA} (x+y) ds + \int_{AB} (x+y) ds + \int_{BO} (x+y) ds \\ &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 \sqrt{2} dx + \int_0^1 y dy = 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

【4222】 $\int_C y^2 ds$, 其中 C 为摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的一拱.

解 弧长的微分为 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt$.

于是, $\int_C y^2 ds = 2a^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} (1 - \cos t)^2 dt = 8a^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} dt = 32a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du = \frac{256}{15} a^3$.

【4223】 $\int_C (x^2 + y^2) ds$ 其中 C 为曲线 $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

解 弧长的微分为 $ds = \sqrt{a^2 t^2 \cos^2 t + a^2 t^2 \sin^2 t} dt = at dt$.

于是, $\int_C (x^2 + y^2) ds = \int_0^{2\pi} [a^2(\cos t + t \sin t)^2 + a^2(\sin t - t \cos t)^2] at dt = \int_0^{2\pi} a^3 t(1 + t^2) dt = 2\pi^2 a^3 (1 + 2\pi^2)$.

【4224】 $\int_C xy ds$ 其中 C 为双曲线 $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$ ($0 \leq t \leq t_0$) 的弧.

解 弧长的微分为 $ds = \sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + a^2 \operatorname{ch}^2 t} dt = a \sqrt{\operatorname{ch} 2t} dt$.

于是, $\int_C xy ds = a^3 \int_0^{t_0} \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t \sqrt{\operatorname{ch} 2t} dt = \frac{a^3}{2} \int_0^{t_0} \operatorname{sh} 2t \sqrt{\operatorname{ch} 2t} dt = \frac{a^3}{4} \int_0^{t_0} \sqrt{\operatorname{ch} 2t} d(\operatorname{ch} 2t) = \frac{a^3}{6} (\sqrt{\operatorname{ch}^3 2t_0} - 1)$.

【4225】 $\int_C (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) ds$, 其中 C 为星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的弧.

解 解法 1:

按直角坐标方程计算, 弧长的微分为 $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx$.

于是, $\int_C (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) ds = 4 \int_0^a [x^{\frac{1}{3}} + (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}] \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = 4a^{\frac{1}{3}} \int_0^a (2x + a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} - 2a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}) dx = 4a^{\frac{7}{3}}$.

解法 2:

按参数方程计算. 若令 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, 则

$$ds = \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 3a \cos t \sin t dt \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}).$$

于是, $\int_C (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) ds = 4a^{\frac{1}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t + \sin^4 t) 3a \cos t \sin t dt = 24a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t d(\sin t) = 4a^{\frac{7}{3}}$.

【4226】 $\int_C e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$ 其中 C 为由曲线 $r = a$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (r 和 φ 为极坐标) 给出的凸围线.

解 凸围线由三段组成, 分别是: 直线段 $\varphi = 0$ ($0 \leq r \leq a$); 圆弧段 $r = a$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$); 直线段 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ($0 \leq r \leq a$). 弧长的微分相应地是: $ds = dr$; $ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = a d\varphi$; $ds = dr$. 于是,

$$\int_C e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds = \int_0^a e^r dr + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a d\varphi + \int_0^a e^r dr = 2(e^a - 1) + \frac{\pi a e^a}{4}.$$

【4227】 $\int_C |y| ds$ 其中 C 为双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 的弧.

解 双纽线的极坐标方程为 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi.$$

于是, $\int_C |y| ds = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 4a^2 (-\cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2 (2 - \sqrt{2})$.

【4228】 $\int_C x ds$, 其中 C 为对数螺线 $r = ae^{k\varphi}$ ($k > 0$) 在圆 $r = a$ 内的部分.

解 弧长的微分为 $ds = ae^{k\varphi} \sqrt{1 + k^2} d\varphi$ ($-\infty < \varphi < 0$).

于是, $\int_C x ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ae^{k\varphi} \cos \varphi \cdot ae^{k\varphi} \sqrt{1 + k^2} d\varphi = a^2 \sqrt{1 + k^2} \frac{2k \cos \varphi + \sin \varphi}{1 + 4k^2} e^{2k\varphi} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2ka^2 \sqrt{1 + k^2}}{1 + 4k^2}$.

【4229】 $\int_C \sqrt{x^2+y^2} ds$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ax$.

解 对于上半圆周, 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{a-2x}{2y}\right)^2} dx = \frac{a}{2y} dx = \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}} dx \quad (0 \leq x \leq a).$$

于是,
$$\int_C \sqrt{x^2+y^2} ds = 2 \int_0^a \sqrt{ax-x^2} \cdot \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}} dx = a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = 2a^2.$$

【4230】 $\int_C \frac{ds}{y^2}$, 其中 C 为悬链线 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx.$$

于是,
$$\int_C \frac{ds}{y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a}}{a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}} dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\operatorname{sh} \frac{x}{a})}{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \arctan(\operatorname{sh} \frac{x}{a}) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{a}.$$

求下列空间曲线的弧长(参数是正的):

【4231】 $x=3t, y=3t^2, z=2t^3$, 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} dt = 3(2t^2+1) dt.$$

于是, 弧长为

$$s = \int_0^1 3(2t^2+1) dt = 5.$$

【4232】 $x=e^{-t} \cos t, y=e^{-t} \sin t, z=e^{-t}$, 当 $0 \leq t < +\infty$.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{e^{-2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) + e^{-2t}(\cos t + \sin t)^2 + e^{-2t}} dt = \sqrt{3} e^{-t} dt.$$

于是, 弧长为

$$s = \sqrt{3} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \sqrt{3}.$$

【4233】 $y = a \arcsin \frac{x}{a}, z = \frac{a}{4} \ln \frac{a+x}{a-x}$, 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_1, y_0, z_0)$.

解 弧长的微分为
$$ds = \sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^4}{4(a^2-x^2)^2}} dx = \frac{3a^2+2x^2}{2(a^2-x^2)} dx \quad (|x| < a).$$

于是, 当 $x_0 \geq 0$ 时, 有

$$s = \int_0^{x_0} \frac{3a^2+2x^2}{2(a^2-x^2)} dx = \frac{a}{4} \ln \frac{a+x_0}{a-x_0} + x_0 = |z_0| + |x_0|;$$

当 $x_0 < 0$ 时, 有

$$s = \int_{x_0}^0 \frac{3a^2+2x^2}{2(a^2-x^2)} dx = \frac{a}{4} \ln \frac{a+x_0}{a-x_0} - x_0 = |z_0| + |x_0|.$$

总之, 当 $|x_0| < a$ 时, 有 $s = |z_0| + |x_0|$.

【4234】 $(x-y)^2 = a(x+y), x^2-y^2 = \frac{9}{8}z^2$, 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0, y_0, z_0)$.

解 由 $(x-y)^2 = a(x+y), x^2-y^2 = \frac{9}{8}z^2$ 可解得

$$x = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} \sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2} \sqrt[3]{z^2} + \sqrt[3]{\frac{9a}{8}} \sqrt[3]{z^2} \right], \quad y = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} \sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2} \sqrt[3]{z^2} - \sqrt[3]{\frac{9a}{8}} \sqrt[3]{z^2} \right].$$

注意到

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \frac{8}{9a^2} \sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2} \sqrt[3]{z^2} + \frac{2}{9} \sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2} \sqrt[3]{z^2} = \frac{\sqrt[3]{9a}}{2a} \sqrt[3]{z^2} + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6} \sqrt[3]{z^2},$$

于是, 弧长为

$$s = \int_0^{z_0} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a} \sqrt[3]{z^2} + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6} \sqrt[3]{z^2}} dz = \int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a} t + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6} \frac{1}{t} + 1} \frac{3\sqrt[3]{t}}{2} dt$$

$$= \frac{3}{2} \int_{z_0}^{\sqrt{z_0}} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a} t^2 + t + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}} dt = \frac{3}{2} \int_{z_0}^{\sqrt{z_0}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{a}} t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a}{3}} \right) dt$$

$$\frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{3z_0^4}{a}} + 2\sqrt{\frac{az_0^3}{3}} \right).$$

【4235】 $x^2 + y^2 = cz, \frac{y}{x} = \tan \frac{z}{c}$, 从 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(x_0, y_0, z_0)$.

提示 取曲线的参数方程为 $x = \sqrt{cz} \cos \frac{z}{c}, y = \sqrt{cz} \sin \frac{z}{c}, z = z$.

解 取曲线的参数方程为 $x = \sqrt{cz} \cos \frac{z}{c}, y = \sqrt{cz} \sin \frac{z}{c}, z = z$, 则弧长的微分为

$$ds = \left[\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}} \cos \frac{z}{c} - \sqrt{\frac{z}{c}} \sin \frac{z}{c} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}} \sin \frac{z}{c} + \sqrt{\frac{z}{c}} \cos \frac{z}{c} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} dz = \sqrt{\frac{c}{4z} + \frac{z}{c} + 1} dz$$

$$= \frac{2z+c}{\sqrt{4cz}} dz.$$

于是, 弧长为

$$s = \int_0^{z_0} \frac{2z+c}{\sqrt{4cz}} dz = \int_0^{z_0} \sqrt{\frac{z}{c}} dz + \int_0^{z_0} \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}} dz = \sqrt{cz_0} \left(1 + \frac{2z_0}{3c} \right).$$

【4236】 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ch} \left(\arctan \frac{y}{x} \right) = a$, 从点 $(a, 0, 0)$ 到点 $B(x, y, z)$.

解 令 $x = \sqrt{a^2 - z^2} \cos \varphi, y = \sqrt{a^2 - z^2} \sin \varphi$, 不妨设 $z > 0$, 则有

$$z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi} \right)} = a \operatorname{th} \varphi.$$

而 $\sqrt{a^2 - z^2} = \sqrt{a^2 (1 - \operatorname{th}^2 \varphi)} = \frac{a}{\operatorname{ch} \varphi}$, 故 $x = \frac{a \cos \varphi}{\operatorname{ch} \varphi}, y = \frac{a \sin \varphi}{\operatorname{ch} \varphi}, z = a \operatorname{th} \varphi$ 为曲线的参数方程, 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi} \right)^2} d\varphi = a \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 \varphi + \operatorname{sh}^2 \varphi + 1}{\operatorname{ch}^4 \varphi}} d\varphi = \sqrt{2} a \frac{d\varphi}{\operatorname{ch} \varphi}.$$

于是, 弧长为

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{2} a \frac{d\varphi}{\operatorname{ch} \varphi} = \sqrt{2} a \int_0^{\varphi} \frac{2}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} d\varphi = 2\sqrt{2} a \int_0^{\varphi} \frac{1}{1 + (e^{\varphi})^2} d(e^{\varphi})$$

$$= 2\sqrt{2} a \arctan e^{\varphi} \Big|_0^{\varphi} = 2\sqrt{2} a \left(\arctan \frac{a+z}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \frac{\pi}{4} \right)^{**} = \sqrt{2} a \arctan \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}}^{***}.$$

容易推证, 当 $z < 0$ 时, 弧长为

$$s = \sqrt{2} a \arctan \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$$

总之, 最后得 $s = \sqrt{2} a \arctan \frac{|z|}{\sqrt{a^2 - z^2}}$.

*) 由 $z = a \operatorname{th} \varphi$ 知: $z(e^{\varphi} + e^{-\varphi}) = a(e^{\varphi} - e^{-\varphi})$, $z(e^{2\varphi} + 1) = a(e^{2\varphi} - 1)$,

从而, $e^{2\varphi} = \frac{a+z}{a-z}$ 或 $e^{\varphi} = \frac{a+z}{\sqrt{a^2 - z^2}}$.

**) 由于 $\tan \left(\arctan \frac{a+z}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a - \sqrt{a^2 - z^2}}{z}$, $\tan \frac{1}{2} \left(\arctan \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}} \right) = \frac{a - \sqrt{a^2 - z^2}}{z}$,

故在主值范围内有 $\arctan \frac{a+z}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}}$.

计算沿空间曲线的第一型曲线积分:

【4237】 $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$ 其中 C 为螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的一段.

解 弧长的微分为 $ds = \sqrt{a^2 + b^2} dt$. 于是,

$$\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) dt = \frac{2\pi}{3} (3a^2 + 4\pi b^2) \sqrt{a^2 + b^2}.$$

【4238】 $\int_C x^2 ds$, 其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$.

提示 由对称性知: $\int_C x^2 ds = \int_C y^2 ds = \int_C z^2 ds$.

解 解法 1:

由对称性知: $\int_C x^2 ds = \int_C y^2 ds = \int_C z^2 ds$. 于是,

$$\int_C x^2 ds = \frac{1}{3} \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{a^2}{3} \int_C ds = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

解法 2:

作代换 $u = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, v = \frac{x+y-2z}{\sqrt{6}}, w = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$, 则圆周 C 化为 $u^2 + v^2 + w^2 = a^2, w = 0$. 于是,

$$\begin{aligned} \int_C x^2 ds &= \int_C \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{6}} + \frac{w}{\sqrt{3}} \right)^2 ds = \int_C \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{6}} \right)^2 ds = \frac{1}{6} \int_C (3u^2 + v^2) ds + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_C uv ds \\ &= \frac{1}{6} \int_C a^2 ds + \frac{1}{3} \int_C u^2 ds + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_C uv ds = \frac{1}{3} \pi a^3 + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^3 \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} a^3 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \pi a^3 + \frac{1}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

【4239】 $\int_C z ds$, 其中 C 为圆锥螺旋线 $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t$ ($0 \leq t \leq 1$).

解 弧长的微分为 $ds = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt = \sqrt{2 + t^2} dt$.

于是, $\int_C z ds = \int_0^1 t \sqrt{2 + t^2} dt = \frac{1}{3} [(2 + t^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}].$

【4240】 $\int_C z ds$, 其中 C 为曲线 $x^2 + y^2 = z^2, y^2 = ax$ 上从点 $O(0, 0, 0)$ 到点 $A(a, a, a\sqrt{2})$ 的弧.

解 由曲线方程得 $z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^4}{a^2} + y^2} = \frac{y}{a} \sqrt{y^2 + a^2}$.

从而, 曲线的参数方程可取为 $x = \frac{y^2}{a}, y = y, z = \frac{y}{a} \sqrt{y^2 + a^2}$.

弧长的微分为 $ds = \sqrt{\left(\frac{2y}{a}\right)^2 + 1 + \left(\frac{2y^2 + a^2}{a \sqrt{y^2 + a^2}}\right)^2} dy = \sqrt{\frac{8y^4 + 9a^2 y^2 + 2a^4}{a^2 (y^2 + a^2)}} dy$.

于是,

$$\begin{aligned} \int_C z ds &= \int_0^a \frac{y}{a} \sqrt{y^2 + a^2} \sqrt{\frac{8y^4 + 9a^2 y^2 + 2a^4}{a^2 (y^2 + a^2)}} dy = \frac{\sqrt{8}}{a^2} \int_0^a y \sqrt{y^4 + \frac{9}{8} a^2 y^2 + \frac{1}{4} a^4} dy \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a^2} \int_0^a \sqrt{\left(y^2 + \frac{9a^2}{16}\right)^2 - \frac{17a^4}{16^2}} d\left(y^2 + \frac{9a^2}{16}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a^2} \left[\frac{y^2 + \frac{9a^2}{16}}{2} \sqrt{y^4 + \frac{9}{8} a^2 y^2 + \frac{1}{4} a^4} - \frac{17a^4}{2 \cdot 16^2} \ln \left(y^2 + \frac{9a^2}{16} + \sqrt{y^4 + \frac{9}{8} a^2 y^2 + \frac{1}{4} a^4} \right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a^2} \left[\left(\frac{25a^4}{64} \sqrt{\frac{19}{2}} - \frac{17a^4}{2 \cdot 16^2} \ln \frac{25a^2 + 8\sqrt{\frac{19}{2}} a^2}{16} \right) - \left(\frac{9a^4}{64} - \frac{17a^4}{2 \cdot 16^2} \ln \frac{17a^4}{16} \right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a^2} \left[\frac{25a^4 \sqrt{38} - 18a^4}{128} + \frac{\sqrt{2}}{a^2} \frac{17a^4}{2 \cdot 16^2} \ln \frac{17a^2}{25a^2 + 8\sqrt{\frac{19}{2}} a^2} \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left[100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right].$$

【4241】 设曲线 $x = acost, y = bsint$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 在点 (x, y) 的线密度等于 $\rho = |y|$, 求其质量.

解 质量 $M = \int_C |y| ds$, 其中 C 为椭圆 $x = acost, y = bsint$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

先设 $a > b$. 这时

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = a \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt$$

其中 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. 于是,

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\pi absint \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt + \int_\pi^{2\pi} a(-bsint) \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt \\ &= ab \int_0^\pi \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} d(cost) + ab \int_\pi^{2\pi} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} d(cost) \\ &= ab \int_1^{-1} \sqrt{1 - \epsilon^2 u^2} du + ab \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \epsilon^2 u^2} du - 4ab \int_0^1 \sqrt{1 - \epsilon^2 u^2} du \\ &= \frac{4ab}{\epsilon} \left[\frac{1}{2} \epsilon u \sqrt{1 - \epsilon^2 u^2} + \frac{1}{2} \arcsin(\epsilon u) \right] \Big|_{u=1}^{-1} = 2b^2 + 2ab \frac{\arcsin \epsilon}{\epsilon}. \end{aligned}$$

次设 $a < b$. 这时

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = a \sqrt{1 + \epsilon_1^2 \cos^2 t} dt,$$

其中 $\epsilon_1 = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$. 仿前, 有

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\pi absint \sqrt{1 + \epsilon_1^2 \cos^2 t} dt + \int_\pi^{2\pi} a(-bsint) \sqrt{1 + \epsilon_1^2 \cos^2 t} dt = 4ab \int_0^1 \sqrt{1 + \epsilon_1^2 u^2} du \\ &= \frac{4ab}{\epsilon_1} \left[\frac{1}{2} \epsilon_1 u \sqrt{1 + \epsilon_1^2 u^2} + \frac{1}{2} \ln(\epsilon_1 u + \sqrt{1 + \epsilon_1^2 u^2}) \right] \Big|_{u=0}^1 = 2b^2 + 2ab \frac{\ln(\epsilon_1 + \sqrt{1 + \epsilon_1^2})}{\epsilon_1}. \end{aligned}$$

最后, 若 $a = b$, 则椭圆退化成圆, 这时 $ds = a dt$, 故

$$M = \int_0^\pi a^2 \sin t dt + \int_\pi^{2\pi} (-a \sin t) a dt = 4a^2.$$

综上所述, 可知:

$$M = \begin{cases} 2b^2 + 2ab \frac{\arcsin \epsilon}{\epsilon}, & a > b, \\ 2b^2 + 2ab \frac{\ln(\epsilon_1 + \sqrt{1 + \epsilon_1^2})}{\epsilon_1}, & a < b, \\ 4a^2, & a = b, \end{cases}$$

其中

$$\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} (a > b), \quad \epsilon_1 = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} (a < b),$$

【4242】 求曲线 $x = at, y = \frac{a}{2} t^2, z = \frac{a}{3} t^3$ ($0 \leq t \leq 1$) 的弧的质量, 其密度按规律 $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}}$ 而变化.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{a^2 + a^2 t^2 + a^2 t^4} dt = a \sqrt{1 + t^2 + t^4} dt,$$

而密度 $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}} = t$. 于是, 质量为 (作代换 $u = t^2$)

$$\begin{aligned} M &= \int_C \sqrt{\frac{2y}{a}} ds = a \int_0^1 t \sqrt{1 + t^2 + t^4} dt = \frac{a}{2} \int_0^1 \sqrt{1 + u + u^2} du \\ &= \frac{a}{2} \left[\frac{u + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + u + u^2} + \frac{3}{8} \ln \left(u + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + u + u^2} \right) \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{a}{8} \left[(3\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2} \ln \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \right]. \end{aligned}$$

【4243】 计算均匀曲线 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 从点 $A(0, a)$ 到点 $B(b, h)$ 的弧的质心的坐标.

解 弧长的微分为 $ds = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx$.

质量为 $M = \rho_0 \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \rho_0 \operatorname{sh} \frac{b}{a} = \rho_0 \sqrt{h^2 - a^2}$.

于是, 质心的坐标为

$$x_0 = \frac{\rho_0}{M} \int_0^b x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \frac{\rho_0}{M} \left[ab \operatorname{sh} \frac{b}{a} - a^2 \left(\operatorname{ch} \frac{b}{a} - 1 \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{h^2 - a^2}} \left[b \sqrt{h^2 - a^2} - a^2 \left(\frac{h}{a} - 1 \right) \right] \\ = b - a \sqrt{\frac{h-a}{h+a}};$$

$$y_0 = \frac{\rho_0}{M} \int_0^b y \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \frac{a \rho_0}{M} \int_0^b \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx = \frac{a \rho_0}{M} \int_0^b \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2} dx = \frac{a \rho_0}{M} \left[\frac{x}{2} + \frac{a}{4} \operatorname{sh} \frac{2x}{a} \right]_0^b \\ = \frac{a \rho_0}{M} \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{4} \operatorname{sh} \frac{2b}{a} \right) = \frac{a}{\sqrt{h^2 - a^2}} \left(\frac{b}{2} + \frac{h}{2} \frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a} \right) = \frac{h}{2} + \frac{ab}{2 \sqrt{h^2 - a^2}}.$$

*) 由 $h = a \operatorname{ch} \frac{b}{a}$ 知: $\operatorname{ch} \frac{b}{a} = \frac{h}{a}$. 从而, $\operatorname{sh} \frac{b}{a} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{b}{a} - 1} = \frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a}$.

【4244】 求摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) 的弧的质心.

解 弧长的微分为 $ds = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt$.

质量为 $M = 2a \rho_0 \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt = 4a \rho_0$. 于是, 质心的坐标为

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_0^\pi \rho_0 a(t - \sin t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt = \frac{a}{2} \int_0^\pi t \sin \frac{t}{2} dt - \frac{a}{2} \int_0^\pi \sin t \sin \frac{t}{2} dt \\ = -a t \cos \frac{t}{2} \Big|_0^\pi + a \int_0^\pi \cos \frac{t}{2} dt + \frac{a}{4} \int_0^\pi \left(\cos \frac{3t}{2} + \cos \frac{t}{2} \right) dt = \frac{4a}{3}; \\ y_0 = \frac{1}{M} \int_0^\pi \rho_0 a(1 - \cos t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt = \frac{a}{2} \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt - \frac{a}{4} \int_0^\pi \left(\sin \frac{3t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) dt = \frac{4a}{3}.$$

【4245】 计算球面上的三角形 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的围线的质心的坐标.

解 作球坐标变换 $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \cos \psi$, $z = r \sin \psi$,

则球面上的三角形三条曲边的方程分别是:

$$x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = 0; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$$

$$x = \cos \psi, y = 0, z = a \sin \psi; 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2};$$

$$x = 0, y = a \cos \psi, z = a \sin \psi; 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

又因围线的周长为 $s = 3 \cdot \frac{\pi a}{2} = \frac{3\pi a}{2}$. 于是, 质心的坐标为

$$x_0 = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \varphi \cdot a d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \psi \cdot a d\psi}{\frac{3\pi a}{2}} = \frac{2a^2}{3\pi a} = \frac{4a}{3\pi}.$$

利用对称性知: $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{4a}{3\pi}$.

【4246】 求均匀的弧 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ ($-\infty < t \leq 0$) 的质心的坐标.

解 弧长的微分为 $ds = \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - \sin^2 t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}} dt = \sqrt{3} e^t dt$.

质量为 $M = \int_{-\infty}^0 \sqrt{3} e^t dt = \sqrt{3}$.

于是,质心的坐标为

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{1}{M} \int_0^{\pi} e^t \cos t \cdot \sqrt{3} e^t dt = \int_0^{\pi} e^{2t} \cos t dt = \left. \frac{2 \cos t + \sin t}{5} e^{2t} \right|_0^{\pi} = -\frac{2}{5}, \\y_c &= \frac{1}{M} \int_0^{\pi} e^t \sin t \cdot \sqrt{3} e^t dt = \int_0^{\pi} e^{2t} \sin t dt = \left. \frac{2 \sin t - \cos t}{5} e^{2t} \right|_0^{\pi} = -\frac{1}{5}, \\z_c &= \frac{1}{M} \int_0^{\pi} e^t \cdot \sqrt{3} e^t dt = \int_0^{\pi} e^{2t} dt = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

【4247】 求螺线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{h}{2\pi} t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的一支对坐标轴的转动惯量.

解 弧长的微分为 $ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}} dt = \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} dt$.

于是,转动惯量为

$$\begin{aligned}I_x &= \int_C (y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} \left(a^2 \sin^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2} t^2 \right) \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} dt \\&= \frac{a^2}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \pi + \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \frac{1}{3} (2\pi)^3 = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}, \\I_y &= \int_C (x^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} \left(a^2 \cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2} t^2 \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} dt \\&= \frac{a^2}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \pi + \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \frac{1}{3} (2\pi)^3 = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}, \\I_z &= \int_C (x^2 + y^2) ds = \int_0^{2\pi} a^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} dt = a^2 \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}.\end{aligned}$$

【4248】 计算第二型曲线积分 $\int_{OA} x dy - y dx$,

式中 O 为坐标原点, A 点的坐标为 $(1, 2)$ 并设: (1) OA 为直线段; (2) OA 为抛物线, 其轴为 Oy ; (3) OA 为由 Ox 轴上的线段 OB 和平行于 Oy 轴的线段 BA 组成的折线.

解 (1) 直线段的方程为 $y = 2x$. 于是,

$$\int_{OA} x dy - y dx = \int_0^1 (2x - 2x) dx = 0.$$

(2) 抛物线段的方程为 $y = 2x^2$. 于是,

$$\int_{OA} x dy - y dx = \int_0^1 (4x^2 - 2x^2) dx = \frac{2}{3}.$$

(3) 线段 OB 的方程为 $y = 0$, BA 的方程为 $x = 1$. 于是,

$$\int_{OA} x dy - y dx = \int_0^2 0 \cdot dx + \int_0^2 dy = 2.$$

【4249】 对于上题中所指示的路径(1), (2), (3), 计算

$$\int_{OA} x dy + y dx.$$

解 (1) $\int_{OA} x dy + y dx = \int_0^1 (2x + 2x) dx = 2$.

(2) $\int_{OA} x dy + y dx = \int_0^1 (4x^2 + 2x^2) dx = 2$.

(3) $\int_{OA} x dy + y dx = \int_0^2 dy = 2$.

在参数增加的方向, 沿所指示的曲线来计算下列第二型曲线积分:

【4250】 $\int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, 其中 C 为抛物线 $y = x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$).

解 由题设 $y = x^2$, 从而, $dy = 2x dx$. 于是,

$$\int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy = \int_1^1 [(x^2 - 2x^3) + 2x(x^4 - 2x^3)]dx = \frac{14}{15}.$$

【4251】 $\int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, 其中 C 为曲线 $y = 1 - |x|$ ($0 \leq x \leq 2$).

解 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y = 1 - (1 - x) = x$, 从而, $dy = dx$; 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $y = 1 - (x - 1) = 2 - x$, 从而, $dy = -dx$. 于是,

$$\int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy = \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^2 [x^2 + (2-x)^2 - x^2 + (2-x)^2]dx = \frac{4}{3}.$$

【4252】 $\oint_C (x+y)dx + (x-y)dy$, 其中 C 为依逆时针方向通过的椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 利用椭圆的参数方程 $x = acost$, $y = bsint$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), 则有

$$\begin{aligned} \oint_C (x+y)dx + (x-y)dy &= \int_0^{2\pi} [(acost + bsint)(-asint) + (acost - bsint)bcost]dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(ab\cos 2t - \frac{a^2 + b^2}{2} \sin 2t \right) dt = 0. \end{aligned}$$

【4253】 $\int_C (2a-y)dx + xdy$, 其中 C 为摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的一拱.

解 由题设知: $dx = a(1 - \cos t)dt$, $dy = asintdt$. 于是,

$$\begin{aligned} \int_C (2a-y)dx + xdy &= \int_0^{2\pi} \{ [2a - a(1 - \cos t)]a(1 - \cos t) + a(t - \sin t)asint \} dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 t \sin t dt - a^2 (t \cos t - \sin t) \Big|_0^{2\pi} = -2\pi a^2. \end{aligned}$$

【4254】 $\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 C 为依逆时针方向通过的圆周 $x^2 + y^2 = a^2$.

解 利用圆的参数方程 $x = acost$, $y = asint$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), 则有

$$\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-(acost + asint)asint - (acost - asint)acost}{a^2} dt = - \int_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

【4255】 $\oint_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, 其中 $ABCD$ 为以 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$ 为顶点的正方形的围线.

提示 注意正方形各边的方程分别为

$$AB: y = 1 - x; \quad BC: y = 1 + x; \quad CD: y = -1 - x; \quad DA: y = -1 + x.$$

解 正方形各边的方程分别为

$$AB: y = 1 - x; \quad BC: y = 1 + x; \quad CD: y = -1 - x; \quad DA: y = -1 + x.$$

于是,

$$\begin{aligned} \oint_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} &= \int_{AB} \frac{dx + dy}{x + y} + \int_{BC} \frac{dx + dy}{-x + y} + \int_{CD} \frac{dx + dy}{-x - y} + \int_{DA} \frac{dx + dy}{x - y} \\ &= \int_1^0 (1-1)dx + \int_0^1 2dx + \int_{-1}^0 (1-1)dx + \int_0^1 2dx = 0. \end{aligned}$$

【4256】 $\int_{AB} \sin y dx + \sin x dy$, 其中 AB 为介于点 $A(0, \pi)$ 和点 $B(\pi, 0)$ 之间的直线段.

解 AB 的方程为 $y = \pi - x$. 于是,

$$\int_{AB} \sin y dx + \sin x dy = \int_0^\pi \sin(\pi - x)dx - \sin x dx = \int_0^\pi (\sin x - \sin x)dx = 0.$$

注 原题为 $\int_{AB} dx \sin y + dy \sin x$, 若把它理解为 $\int_{AB} d(x \sin y) + d(y \sin x)$, 其值仍为零, 与原答案也符合.

【4257】 $\oint_{OmAnO} \arctan \frac{y}{x} dy - dx$, 其中 OmA 为抛物线段 $y = x^2$, OnA 为直线段 $y = x$

解 如图 8.62 所示, 我们有

$$\begin{aligned} \oint_{(AmAn)} \arctan \frac{y}{x} dy - dx &= \int_{AmA} \arctan \frac{y}{x} dy - dx + \int_{AnO} \arctan \frac{y}{x} dy - dx \\ &= \int_1^1 2x \arctan x dx - \int_1^1 dx + \int_1^1 (\arctan 1 - 1) dx \\ &= x^2 \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - 1 + \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) x \Big|_1^0 \\ &= \frac{\pi}{4} - (x - \arctan x) \Big|_1^1 - 1 - \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) = \frac{\pi}{4} - 1 \end{aligned}$$

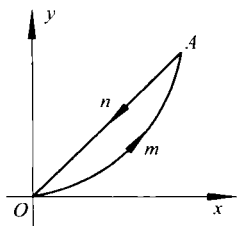


图 8.62

注 原题为 $\int_{(AmAn)} dy \arctan \frac{y}{x} - dx$, 若把它理解为

$$\int_{(AmAn)} d\left(y \arctan \frac{y}{x}\right) - dx,$$

则其值为零, 与原答案不符.

验证被积函数为全微分, 并计算下列曲线积分:

【4258】 $\int_{(1,2)}^{(2,3)} x dy + y dx.$

解 显然, $x dy + y dx = d(xy)$ 是全微分. 于是,

$$\int_{(1,2)}^{(2,3)} x dy + y dx = \int_{(1,2)}^{(2,3)} d(xy) = xy \Big|_{(1,2)}^{(2,3)} = 8.$$

【4259】 $\int_{(0,1)}^{(3,4)} x dx + y dy.$

解 显然, $x dx + y dy = d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$ 是全微分. 于是,

$$\int_{(0,1)}^{(3,4)} x dx + y dy = \int_{(0,1)}^{(3,4)} d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = \frac{x^2+y^2}{2} \Big|_{(0,1)}^{(3,4)} = 12.$$

【4260】 $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y) dx + (x-y) dy.$

解 显然, 我们有

$$(x+y) dx + (x-y) dy = (y dx + x dy) + (x dx - y dy) = d(xy) + d\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right) = d\left(xy + \frac{x^2-y^2}{2}\right),$$

即是全微分. 于是, $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y) dx + (x-y) dy = \int_{(0,1)}^{(2,3)} d\left(xy + \frac{x^2-y^2}{2}\right) = \left(xy + \frac{x^2-y^2}{2}\right) \Big|_{(0,1)}^{(2,3)} = 4.$

【4261】 $\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy).$

解 显然, $(x-y)(dx-dy) = d\left(\frac{(x-y)^2}{2}\right)$ 是全微分. 于是,

$$\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy) = \int_{(1,-1)}^{(1,1)} d\left(\frac{(x-y)^2}{2}\right) = \frac{(x-y)^2}{2} \Big|_{(1,-1)}^{(1,1)} = -2.$$

【4262】 $\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx+dy)$, 其中 $f(u)$ 为连续函数.

解题思路 令 $F(x, y) = \int_0^{x+y} f(u) du$. 注意

$$F'_x(x, y) = F'_y(x, y) = f(x+y), \quad \text{及} \quad dF(x, y) = f(x+y)(dx+dy),$$

即可获解.

解 令 $F(x, y) = \int_0^{x+y} f(u) du$. 由于 $f(u)$ 连续, 故

$$F'_x(x, y) = f(x+y), \quad F'_y(x, y) = f(x+y),$$

并且它们都是 x, y 的连续函数. 因此, $F(x, y)$ 可微, 且

$$dF(x, y) = F'_x(x, y)dx + F'_y(x, y)dy = f(x+y)(dx+dy),$$

故 $f(x+y)(dx+dy)$ 是全微分, 并且

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x, y)(dx+dy) = F(a, b) - F(0, 0) = \int_0^{a+b} f(u)du.$$

【4263】 $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$ 沿着不与 Oy 轴相交的路径.

解 显然, 当 $x \neq 0$ 时, $\frac{ydx - xdy}{x^2} = d\left(-\frac{y}{x}\right)$ 是全微分. 于是,

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2} = \int_{(2,1)}^{(1,2)} d\left(-\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x} \Big|_{(2,1)}^{(1,2)} = -\frac{3}{2}.$$

【4264】 $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 沿着不通过坐标原点的路径.

解 显然, 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d(\sqrt{x^2 + y^2})$ 是全微分. 于是,

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_{(1,0)}^{(6,8)} d(\sqrt{x^2 + y^2}) = \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = 9.$$

【4265】 $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy$, 其中 φ 和 ψ 为连续函数.

解 由于 φ, ψ 是连续函数, 故显然有

$$\varphi(x) dx + \psi(y) dy = dF(x) + dG(y) = d[F(x) + G(y)],$$

其中 $F(x) = \int_{x_1}^x \varphi(u) du, G(y) = \int_{y_1}^y \psi(v) dv$. 从而, $\varphi(x) dx + \psi(y) dy$ 是函数 $F(x) + G(y)$ 的全微分, 于是,

$$\begin{aligned} \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy &= [F(x) + G(y)] \Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} = [F(x_2) + G(y_2)] - [F(x_1) + G(y_1)] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \varphi(u) du + \int_{y_1}^{y_2} \psi(v) dv. \end{aligned}$$

【4266】 $\int_{(2,1)}^{(3,1)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$.

解 $P = x^4 + 4xy^3, Q = 6x^2y^2 - 5y^4$. 显然, P, Q 在全平面上具有连续偏导数, 并且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2,$$

故 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 由于全平面是单连通区域, 故在整个平面上表达式 $Pdx + Qdy$ 是某函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并且

线积分 $\int_C Pdx + Qdy$ 与路径无关, 因而, 可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分, 得

$$\begin{aligned} \int_{(2,1)}^{(3,1)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy &= \int_2^3 (x^4 + 4x \cdot 0^3) dx + \int_1^0 [6(-2)^2y^2 - 5y^4] dy \\ &= 55 + 7 = 62. \end{aligned}$$

注 也可利用简单的技巧求出函数 $u(x, y)$ 来. 我们有

$$(x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy = d\left(\frac{x^5}{5}\right) + 2y^3 d(x^2) + 2x^2 d(y^3) - d(y^5) = d\left(\frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5\right),$$

从而, $\int_{(2,1)}^{(3,1)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy = \left(\frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5\right) \Big|_{(2,1)}^{(3,1)} = 62.$

【4267】 $\int_{(0,1)}^{(1,0)} \frac{x dy - y dx}{(x-y)^2}$ 沿着不与直线 $y=x$ 相交的路径.

解 $P = -\frac{y}{(x-y)^2}, Q = \frac{x}{(x-y)^2} (x \neq y)$. 容易验证:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x+y}{(x-y)^3} \quad (x \neq y).$$

考虑平面上的区域 $\Omega = \{(x, y) | x > y\}$. 由于 Ω 是单连通区域, 且在其上 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 故在 Ω 上, $Pdx + Qdy$ 是某函数 $u = u(x, y)$ 的全微分. 从而, 在 Ω 上线积分 $\int_C Pdx + Qdy$ 与路径无关. 因此, 可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分, 得

$$\int_{(-1,1)}^{(1,1)} \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2} = \int_0^1 \frac{-(-1)dx}{(x+1)^2} + \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

注 也可利用简单的技巧求出函数 $u(x, y)$ 来. 我们有

$$\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)dy-yd(x-y)}{(x-y)^2} = d\left(\frac{y}{x-y}\right).$$

从而, $\int_{(-1,1)}^{(1,1)} \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2} = \left. \frac{y}{x-y} \right|_{(-1,1)}^{(1,1)} = 1.$

【4268】 $\int_{(1,\pi)}^{(1+\pi,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy$ 沿着不与 Oy 轴相交的路径.

解 当 $x \neq 0$ 时, 有

$$P = 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}, \quad Q = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3} \sin \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y}{x^3} \cos \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x} = -\frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x}.$$

考虑右半平面 $\Omega = \{(x, y) | x > 0\}$. 由于 Ω 是单连通区域, 且在其上 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 故在 Ω 上必是某函数 $u(x, y)$ 的全微分, 且可取

$$u(x, y) = \int_1^x \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \int_\pi^y (\sin y + y \cos y) dy = \left(x + y \sin \frac{y}{x}\right) \Big|_1^x + y \sin y \Big|_\pi^y = x - 1 + y \sin \frac{y}{x}.$$

于是, $\int_{(1,\pi)}^{(1+\pi,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy = \left(x - 1 + y \sin \frac{y}{x}\right) \Big|_{(1,\pi)}^{(1+\pi,\pi)} = \pi + 1.$

【4269】 $\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy).$

解 显然, 有 $e^x (\cos y dx - \sin y dy) = d(e^x \cos y)$. 于是,

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy) = \int_{(0,0)}^{(a,b)} d(e^x \cos y) = (e^x \cos y) \Big|_{(0,0)}^{(a,b)} = e^a \cos b - 1.$$

【4270】 证明: 若 $f(u)$ 为连续函数且 C 为分段光滑的封闭曲线, 则

$$\oint_C f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0.$$

证明思路 若能求得函数 $F(x, y)$, 使 $dF(x, y) = f(x^2 + y^2)(x dx + y dy)$ (即 $F'_x(x, y) = x f(x^2 + y^2)$, $F'_y(x, y) = y f(x^2 + y^2)$), 即可证明:

$$\oint_C f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = F(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y_0)} = F(x_0, y_0) - F(x_0, y_0) = 0,$$

其中 (x_0, y_0) 为 C 上任意取定的一点. 经过分析, 易知 $F(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2} f(u) du$ 就是这样的函数.

证 令 $F(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2} f(u) du$. 由于 $f(u)$ 是连续函数, 故

$$F'_x(x, y) = x f(x^2 + y^2), \quad F'_y(x, y) = y f(x^2 + y^2),$$

并且显然 $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$ 都是 x, y 的连续函数. 因此, $F(x, y)$ 可微, 且

$$dF(x, y) = F'_x(x, y) dx + F'_y(x, y) dy = f(x^2 + y^2)(x dx + y dy).$$

于是, 任取 C 上一点 (x_0, y_0) , 有

$$\oint_C f(x^2+y^2)(xdx+ydy) = F(x,y) \Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y_0)} = F(x_0,y_0) - F(x_0,y_0) = 0.$$

证毕.

求原函数 z , 设:

$$\text{【4271】 } dz = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 + 2xy - y^2)dy.$$

$$\text{解 } z = \int_0^x (x^2 + 2xy - y^2)dx + \int_0^y (0 - 0 - y^2)dy + C = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + C.$$

$$\text{【4272】 } dz = \frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}.$$

$$\text{解 } z = \int_0^x \frac{ydx}{3x^2 - 2xy + 3y^2} + \int_1^y 0dy + C = \frac{y}{3} \int_0^x \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{3}y\right)^2 + \frac{8y^2}{9}} + C$$

$$= \frac{y}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}y} \arctan \frac{3\left(x - \frac{y}{3}\right)}{2\sqrt{2}y} \Big|_0^x + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{3x-y}{2\sqrt{2}y} + C_1.$$

$$\text{【4273】 } dz = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy}{(x+y)^3}.$$

$$\text{解 } z = \int_0^x \frac{x^2 + 2xy + 5y^2}{(x+y)^3} dx + \int_1^y \frac{0-0+y^2}{(0+y)^3} dy + C = \int_0^x \frac{(x+y)^2 + 4y^2}{(x+y)^3} dx + \int_1^y \frac{dy}{y} + C$$

$$= [\ln|x+y|] \Big|_0^x + \left[\frac{2y^2}{(x+y)^2} \right]_0^x + [\ln|y|] \Big|_1^y + C = \ln|x+y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + C_1.$$

$$\text{【4274】 } dz = e^x [e^y(x-y+2)+y]dx + e^y [e^x(x-y)+1]dy.$$

$$\text{解 } z = \int_0^x [(x-y+2)e^{x-y} + ye^x]dx + \int_0^y (1-ye^x)dy + C$$

$$= [(x-y+1)e^{x-y} + ye^x] \Big|_0^x + [y - ye^y + e^y] \Big|_0^y + C = (x-y+1)e^{x-y} + ye^x + C_1.$$

$$\text{【4275】 } dz = \frac{\partial^{n+m-1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}dx + \frac{\partial^{n+m-1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}dy.$$

$$\text{提示 注意 } dz = d\left(\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}\right).$$

$$\text{解 因为 } dz = \frac{\partial^{n+m-1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}dx + \frac{\partial^{n+m-1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}dy = d\left(\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}\right).$$

$$\text{故有 } z = \frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m} + C.$$

$$\text{【4276】 } dz = \frac{\partial^{n+m-1}u}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dx + \frac{\partial^{n+m-1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dy, \text{ 其中 } r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

解 易知(当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{1}{r}\right) = -\frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{1}{r}\right) = -\frac{y}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right) = -\frac{r^2-2x^2}{r^4}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right) = -\frac{r^2-2y^2}{r^4},$$

故(当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right) = 0. \quad (1)$$

$$\text{令 } P = \frac{\partial^{n+m-1}u}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right), \quad Q = -\frac{\partial^{n+m-1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right),$$

则当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时, 由(1)式知

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\partial y^m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right) \right] = 0.$$

因此,在任何不含原点 $(0,0)$ 的单连通域中, $Pdx+Qdy$ 都是某函数 z 的全微分,并且对上半平面的点 (x,y) (即 $y>0$),可取

$$\begin{aligned} z(x,y) &= \int_0^x P(x,y)dx + \int_1^y Q(0,y)dy + C \\ &= \int_0^x \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n+2} \partial y^{m-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dx + \int_1^y \left[\frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+2}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} dy + C \\ &= \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \Big|_{x=0} - \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{y=1} \\ &\quad + \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{y=1} + C \\ &= \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^n \partial y^{m+1}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{r} \right) - \frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+1}} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} + C_1 \\ &= \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^n \partial y^{m+1}} \left(-\frac{x}{r^2} \right) + C_1 - \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^n \partial y^{m+1}} \left(\frac{\partial}{\partial y} \arctan \frac{x}{y} \right) + C_1 - \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left(\arctan \frac{x}{y} \right) + C_1, \end{aligned}$$

其中 $C_1 = \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} + C$ 是任意常数.

同理,对下半平面上的点 (x,y) (即 $y<0$),可取

$$z(x,y) = \int_0^x P(x,y)dx + \int_1^y Q(0,y)dy + C.$$

经过和前面完全类似的计算,可得 $z(x,y) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left(\arctan \frac{x}{y} \right) + C_2$,

其中

$$C_2 = \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} + C$$

也是任意常数.

【4277】 证明下面的估计对于曲线积分是正确的:

$$\left| \int_C Pdx + Qdy \right| \leq LM,$$

式中 L 为积分路径的长, $M = \max \sqrt{P^2 + Q^2}$ (在弧 C 上).

证明思路 首先注意到

$$\left| \int_C Pdx + Qdy \right| = \left| \int_C (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) ds \right| \leq \int_C |P \cos \alpha + Q \sin \alpha| ds.$$

其次,由 $(P \cos \alpha + Q \sin \alpha)^2 + (P \sin \alpha - Q \cos \alpha)^2 = P^2 + Q^2$ 可知

$$(P \cos \alpha + Q \sin \alpha)^2 \leq P^2 + Q^2 \quad \text{或} \quad |P \cos \alpha + Q \sin \alpha| \leq \sqrt{P^2 + Q^2} \leq M.$$

从而,命题易获证.

$$\text{证 由于} \quad \left| \int_C Pdx + Qdy \right| = \left| \int_C (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) ds \right| \leq \int_C |P \cos \alpha + Q \sin \alpha| ds,$$

又因

$$\begin{aligned} (P \cos \alpha + Q \sin \alpha)^2 &= P^2 \cos^2 \alpha + Q^2 \sin^2 \alpha + 2PQ \sin \alpha \cos \alpha, \\ 0 &\leq (P \sin \alpha - Q \cos \alpha)^2 = P^2 \sin^2 \alpha + Q^2 \cos^2 \alpha - 2PQ \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

故有

$$(P \cos \alpha + Q \sin \alpha)^2 \leq P^2 + Q^2,$$

从而, $|P \cos \alpha + Q \sin \alpha| \leq \sqrt{P^2 + Q^2} \leq M$.于是,

$$\left| \int_C Pdx + Qdy \right| \leq M \int_C ds = LM.$$

【4278】 估计积分 $I_R = \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx - xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}$. 证明: $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$.

提示 注意在圆 $x^2+y^2=R^2$ 上,有 $P^2+Q^2 \leq \frac{16}{R^6}$,及 $M = \max \sqrt{P^2+Q^2} \leq \frac{4}{R^3}$,并利用4277题的结果.

解 在圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 上, 有

$$P^2 + Q^2 = \frac{y^2}{(x^2 + xy + y^2)^4} + \frac{x^2}{(x^2 + xy + y^2)^4} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + xy + y^2)^4} \\ = \frac{R^2}{(R^2 + xy)^4} \leq \frac{R^2}{(R^2 - |xy|)^4} \leq \frac{R^2}{\left(R^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^4} = \frac{16}{R^6}.$$

于是, $M \leq \frac{4}{R^3}$. 利用 4277 题的结果, 即得 I_R 的估计式:

$$|I_R| \leq \frac{4}{R^3} \cdot 2\pi R - \frac{8\pi}{R^2}.$$

由此可知: $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$.

计算沿空间曲线的积分(假定坐标系是右手的):

【4279】 $\int_C (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$, 式中 C 为曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ ($0 \leq t \leq 1$), 以参数增加的方向为正.

$$\text{解} \quad \int_C (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz = \int_0^1 [(t^4 - t^6) + 2t \cdot 2t \cdot t^2 - 3t^2]dt = \int_0^1 (3t^4 - 2t^6)dt = \frac{1}{35}.$$

【4280】 $\int_C ydx + zdy + xdz$, 式中 C 为纽形螺线 $x = acost, y = asint, z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), 以参数增加方向为正.

$$\text{解} \quad \int_C ydx + zdy + xdz = \int_0^{2\pi} (-a^2 \sin t \cos t + abt \cos t + abt \cos t)dt \\ = \left(-\frac{at^2}{2} + \frac{a^2 \sin 2t}{4} + abt \sin t + abt \cos t + absint \right) \Big|_0^{2\pi} = -\pi a^2.$$

【4281】 $\int_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, 式中 C 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = x \tan \alpha$ ($0 < \alpha < \pi$), 若从 Ox 轴的正向看去, 沿逆时针方向为正.

解 如图 8.63 所示. 利用球面的参数方程

$$x = a \cos \varphi \cos \psi, \quad y = a \sin \varphi \cos \psi, \quad z = a \sin \psi,$$

在 \widehat{ABC} 上, $\varphi = \alpha$, 因而, 有

$$\begin{aligned} x &= a \cos \alpha \cos \psi, & dx &= -a \cos \alpha \sin \psi d\psi, \\ y &= a \sin \alpha \cos \psi, & dy &= -a \sin \alpha \sin \psi d\psi, \\ z &= a \sin \psi, & dz &= a \cos \psi d\psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{H.} \quad \int_{\widehat{ABC}} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz \\ &= a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [-(\sin \alpha \cos \psi - \sin \psi) \cos \alpha \sin \psi - (\sin \psi - \cos \alpha \cos \psi) \sin \alpha \sin \psi \\ &\quad + (\cos \alpha \cos \psi - \sin \alpha \cos \psi) \cos \psi] d\psi \\ &= a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \alpha - \sin \alpha) d\psi = \pi a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha) = \sqrt{2} \pi a^2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right). \end{aligned}$$

在 \widehat{CDA} 上, $\varphi = \alpha + \pi$ 同样可得

$$\int_{\widehat{CDA}} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz = -a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \alpha - \cos \alpha) d\psi = \sqrt{2} \pi a^2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

于是, 最后得 $\int_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz = 2\sqrt{2} \pi a^2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$.

【4282】 $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 式中 C 为维维亚尼曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax$ ($z \geq 0, a > 0$),

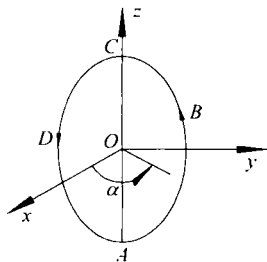


图 8.63

若从 Ox 轴的正向 ($x>0$) 看去, 沿逆时针方向为正.

解 柱面 x^2+y^2-ax 可变为 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$,

故若令 $x-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cos t, y=\frac{a}{2}\sin t$ ($0\leq t\leq 2\pi$), 则

$$z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}=\sqrt{a^2-\left[\frac{a^2(1+\cos t)^2}{4}+\frac{a^2\sin^2 t}{4}\right]}=a\sin\frac{t}{2}.$$

从而, 曲线的参数方程为 $x=\frac{a(1+\cos t)}{2}, y=\frac{a\sin t}{2}, z=a\sin\frac{t}{2}$ ($0\leq t\leq 2\pi$).

$$\begin{aligned} \text{于是, } \int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{a^3 \sin^3 t}{8} + \frac{a^4 \sin^2 \frac{t}{2} \cos t}{2} + \frac{a^3 \cos^3 \frac{t}{2}}{2} \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{8} (1-\cos^2 t) d(\cos t) + \frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos t}{2} \cos t dt + a^3 \int_0^{2\pi} \left(1-\sin^2 \frac{t}{2} \right) d\left(\sin \frac{t}{2}\right) \\ &= \frac{a^4}{8} \left(\cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} + \frac{a^3}{4} \left[\sin t - \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \right] \Big|_0^{2\pi} + a^3 \left(\sin \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{4}. \end{aligned}$$

【4283】 $\int_C (y^2-z^2)dx + (z^2-x^2)dy + (x^2-y^2)dz$, 式中 C 为球面的一部分 $x^2+y^2+z^2=1, x\geq 0,$

$y\geq 0, z\geq 0$ 的边界, 当沿着它的正向移动时, 这部分球面的外侧面保持在左方.

解 边界在 Oxy 平面部分的方程为

$$x=\cos\varphi, y=\sin\varphi, z=0 \quad (0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}).$$

根据轮换对称性知, 只要沿这部分计算线积分, 再三倍之, 便得要求的结果, 即

$$\begin{aligned} &\int_C (y^2-z^2)dx + (z^2-x^2)dy + (x^2-y^2)dz = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2\varphi \cdot (-\sin\varphi) - \cos^2\varphi \cdot \cos\varphi] d\varphi \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\varphi) d(\cos\varphi) - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi) d(\sin\varphi) = 3 \left(\cos\varphi - \frac{1}{3} \cos^3\varphi - \sin\varphi + \frac{1}{3} \sin^3\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -4. \end{aligned}$$

计算下列全微分的曲线积分:

【4284】 $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} xdx + y^2 dy - z^3 dz.$

解 $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} xdx + y^2 dy - z^3 dz = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}z^4 \right) \Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} = -53\frac{7}{12}.$

【4285】 $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx + xzdy + xydz.$

解 $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx + xzdy + xydz = xyz \Big|_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} = 0.$

【4286】 $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 其中点 (x_1, y_1, z_1) 位于球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 之上, 而点 (x_2, y_2, z_2)

位于球 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ 之上 ($a>0, b>0$).

解 由题设知: $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2, x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = b^2$.

于是, $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = b - a.$

【4287】 $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy + \chi(z)dz$, 式中 φ, ψ, χ 为连续函数.

解 因为 $\varphi(x)dx + \psi(y)dy + \chi(z)dz = d\left(\int_{x_1}^x \varphi(u)du + \int_{y_1}^y \psi(v)dv + \int_{z_1}^z \chi(w)dw\right).$

故有 $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy + \chi(z)dz = \left(\int_{x_1}^x \varphi(u)du + \int_{y_1}^y \psi(v)dv + \int_{z_1}^z \chi(w)dw\right) \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(u) du + \int_{y_1}^{y_2} \psi(v) dv + \int_{z_1}^{z_2} \chi(w) dw.$$

【4288】 $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$, 其中 f 为连续函数.

解 令 $F(x, y, z) = \int_0^{x+y+z} f(u) du$. 由于 $f(u)$ 是连续函数, 故

$$F'_x(x, y, z) = f(x+y+z), \quad F'_y(x, y, z) = f(x+y+z), \quad F'_z(x, y, z) = f(x+y+z),$$

并且这些偏导数都是连续的. 因此, $F(x, y, z)$ 可微, 且

$$dF(x, y, z) = F'_x(x, y, z)dx + F'_y(x, y, z)dy + F'_z(x, y, z)dz = f(x+y+z)(dx+dy+dz).$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz) &= F(x, y, z) \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} = F(x_2, y_2, z_2) - F(x_1, y_1, z_1) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f(u) du + \int_{y_1}^{y_2} f(u) du + \int_{z_1}^{z_2} f(u) du. \end{aligned}$$

【4289】 $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz),$

式中 f 为连续函数.

解题思路 令 $F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2+z^2} f(\sqrt{v}) dv$. 注意

$$F'_x(x, y, z) = xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}), \quad F'_y(x, y, z) = yf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}), \quad F'_z(x, y, z) = zf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

及

$$dF(x, y, z) = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz),$$

再令 $\sqrt{v} = u$, 即可得结果 $\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} uf(u) du$.

解 令 $F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2+z^2} f(\sqrt{v}) dv$. 由于 f 是连续函数, 故

$$F'_x(x, y, z) = xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}), \quad F'_y(x, y, z) = yf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}), \quad F'_z(x, y, z) = zf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

并且这些偏导数都是连续的. 因此, $F(x, y, z)$ 可微, 且

$$dF(x, y, z) = F'_x(x, y, z)dx + F'_y(x, y, z)dy + F'_z(x, y, z)dz = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz).$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz) &= F(x_2, y_2, z_2) - F(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{2} \int_{x_1^2+y_1^2+z_1^2}^{x_2^2+y_2^2+z_2^2} f(\sqrt{v}) dv \\ &= \int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} uf(u) du, \end{aligned}$$

*) 这里已作代换 $\sqrt{v} = u$ ($v = u^2$, $dv = 2u du$).

求原函数 u , 若:

【4290】 $du = (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz.$

解 $du = (x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz) - 2(yz dx + xz dy + xy dz) = d\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3} - 2xyz\right).$

于是, $u = \frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3) - 2xyz + C.$

【4291】 $du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}dz.$

解 $du = dx + \left(-\frac{1}{y}dx + \frac{x}{y^2}dy\right) + \frac{1}{z}(ydx + xdy) - \frac{xy}{z^2}dz$
 $= dx + \left(-\frac{1}{y}dx + xd\left(-\frac{1}{y}\right)\right) + \frac{1}{z}d(xy) + xy d\left(\frac{1}{z}\right) = dx + d\left(-\frac{x}{y}\right) + d\left(\frac{xy}{z}\right)$

$$-d\left(x + \frac{x}{y} + \frac{xy}{z}\right).$$

于是, $u = x + \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C$.

$$\text{【4292】 } du = \frac{(x+y-z)dx + (x+y-z)dy + (x+y+z)dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} & (x+y-z)dx + (x+y-z)dy + (x+y+z)dz \\ &= (xdx + ydy) + (ydx + xdy) + (x+y)dz - z(dx + dy) + zdz \\ &= \frac{1}{2}d[(x^2 + y^2 + 2xy) + z^2] + (x+y)dz - zd(x+y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } du &= \frac{1}{2} \cdot \frac{d[(x+y)^2 + z^2]}{(x+y)^2 + z^2} + \frac{(x+y)dz - zd(x+y)}{(x+y)^2 + z^2} - \frac{1}{2}d\ln[(x+y)^2 + z^2] + d\left(\arctan \frac{z}{x+y}\right) \\ &= d\left[\ln \sqrt{(x+y)^2 + z^2} + \arctan \frac{z}{x+y}\right]. \end{aligned}$$

于是, $u = \ln \sqrt{(x+y)^2 + z^2} + \arctan \frac{z}{x+y} + C$.

【4293】 求当质量为 m 的点从位置 (x_1, y_1, z_1) 移动到位置 (x_2, y_2, z_2) 时, 重力所作的功 (Oz 轴的方向是竖直向上).

解 设 i, j, k 为各坐标轴上的单位矢量, 则重力 $F = -mgk$, 而 $ds = dxi + dyj + dzk$. 从而, 功的微分为

$$dA = F \cdot ds = -mgdz = d(-mgz).$$

于是, 重力所作的功为 $A = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} -mgdz = (-mgz) \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} = -mg(z_2 - z_1)$.

【4294】^{*} 弹性力指向坐标原点, 力的大小与质点到坐标原点的距离成正比. 设此点依逆时针方向描绘出椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的正四分之一, 求弹性力所作的功.

解 弹性力 $F = -k(xi + yj)$, 其中 k 为弹性系数. 功的微分为

$$dA = F \cdot ds = -k(xi + yj)(dxi + dyj) = -k(xdx + ydy) = d\left[-\frac{k}{2}(x^2 + y^2)\right].$$

于是, 弹性力所作的功为

$$A = -k \int_{(a, 0)}^{(0, b)} xdx + ydy = -\frac{k}{2}(x^2 + y^2) \Big|_{(a, 0)}^{(0, b)} = \frac{k}{2}(a^2 - b^2).$$

【4295】^{*} 当单位质量从点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 移动到点 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 时, 求引力 $F = \frac{G}{r^2}$ (其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 对它所作的功, 其中 G 是引力常量.

解 引力指向坐标原点, 故它的方向余弦为

$$\cos \alpha = -\frac{x}{r}, \quad \cos \beta = -\frac{y}{r}, \quad \cos \gamma = -\frac{z}{r},$$

而引力的投影为

$$X = -\frac{Gx}{r^3}, \quad Y = -\frac{Gy}{r^3}, \quad Z = -\frac{Gz}{r^3}.$$

于是, 引力所作的功为

$$\begin{aligned} A &= -G \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} = -\frac{G}{2} \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{G}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \\ &= -G \left(\frac{1}{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \frac{1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \right). \end{aligned}$$

当然, 这里假设从 M_1 点到 M_2 点的路径是不经过原点的, 上式表明功与路径无关, 仅决定于起始点的坐标.

§ 12. 格林公式

1° 曲线积分与二重积分的关系 设 C 为分段光滑的简单封闭围线, 它围成单连通的有界区域 S , 并且当沿着围线正方向移动时, 区域 S 保持在左边; 此外, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 及其一阶偏导数 $P'_x(x, y), Q'_y(x, y)$ 在区域 S 内及其边界上皆是连续的, 则成立格林公式

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (1)$$

若把区域 S 的边界 C 理解为一切边界围线之和, 并且这样选取沿围线的环绕方向, 使得区域 S 始终位于左边, 则公式(1)对于由几个简单围线围成的有界区域 S 也成立.

2° 平面区域的面积 以分段光滑的简单围线 C 为界的图形的面积 S 等于:

$$S = \oint_C x dy - \oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

在这一节中, 若没有相反的约定, 则假定积分的封闭围线是简单的(无自交点), 并这样选取围线的正方向, 使得所围不含无穷远点的区域始终位于曲线的左边.

【4296】 利用格林公式变换曲线积分

$$I = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy$$

式中围线 C 是有界区域 S 的边界.

解 此处 $P = \sqrt{x^2 + y^2}, Q = xy + y \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

从而,
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y' + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y' = y^2.$$

于是,
$$I = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_S y^2 dx dy.$$

注 这里应假定 C 不与 Ox 轴的左半部分(即 $x \leq 0, y = 0$)相交, 从而, 这时在 S 中 $x + \sqrt{x^2 + y^2} > 0$.

【4297】 应用格林公式, 计算曲线积分

$$I = \oint_k (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy,$$

其中 k 是以 $A(1, 1), B(3, 2), C(2, 5)$ 为顶点的三角形围线 ABC , 并且积分时的环绕方向为正. 直接计算积分, 以验证所求得的结果.

解 如图 8.64 所示, AB, BC 及 CA 的方程分别为

$$y = \frac{1}{2}(x+1), \quad y = -3x+11, \quad y = 4x-3.$$

由于 $P = (x+y)^2, Q = -(x^2 + y^2)$, 故

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2x - 2(x+y) = -4x - 2y.$$

通过顶点 C 引直线垂直于 Ox 轴, 它把三角形域 S 分成 S_1 和 S_2 两部分. 于是,

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (-4x - 2y) dx dy = \iint_{S_1} (-4x - 2y) dx dy + \iint_{S_2} (-4x - 2y) dx dy \\ &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{3x-11} (-4x - 2y) dy + \int_2^3 dx \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{3x-11} (-4x - 2y) dy \\ &= \int_1^2 \left(-\frac{119}{4}x^2 + \frac{77}{2}x - \frac{35}{4} \right) dx + \int_2^3 \left(\frac{21}{4}x^2 + \frac{49}{2}x - \frac{483}{4} \right) dx \\ &= \frac{245}{12} - \frac{105}{4} = -46\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

如果直接计算, 则

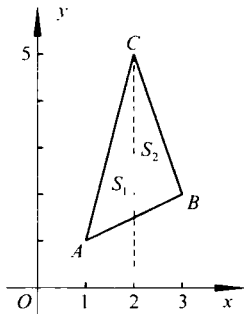


图 8.64

$$\begin{aligned}
I &= \int_{AB} + \int_{BK} + \int_{KA} \\
&= \int_1^3 \left[\left(x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \right] dx + \int_3^2 [(x-3x+11)^2 - (-3) \\
&\quad \cdot (x^2 + 9x^2 - 66x + 121)] dx + \int_2^1 [(x+4x-3)^2 - 4(x^2 + 16x^2 - 24x + 9)] dx \\
&= \int_1^3 \left(\frac{13}{8}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{8} \right) dx + \int_3^2 (34x^2 - 242x + 484) dx + \int_2^1 (-43x^2 + 66x - 27) dx \\
&= \frac{58}{3} - \frac{283}{3} + \frac{85}{3} = -46 \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

应用格林公式, 计算下列曲线积分:

【4298】 $\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx$, 式中 C 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$.

解 由于 $P = -x^2 y, Q = xy^2$, 故有

$$\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{2}.$$

如果直接计算, 可令 $x = acost, y = asint$, 则

$$\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx = a^4 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^2 t) dt = \frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{\pi a^4}{2}.$$

【4299】 $\oint_C (x+y) dx - (x-y) dy$, 式中 C 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 由于 $P = x+y, Q = -(x-y)$, 故有

$$\oint_C (x+y) dx - (x-y) dy = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} (-1-1) dx dy = -2\pi ab.$$

如果直接计算, 则

$$\begin{aligned}
\oint_C (x+y) dx - (x-y) dy &= \int_0^{2\pi} [(acost+bsint)(-asint) - (acost-bsint)(bcost)] dt \\
&= \int_0^{2\pi} [(b^2-a^2)\cos t \sin t - ab] dt = -2\pi ab.
\end{aligned}$$

【4300】 $\oint_C e^x [(1-\cos y) dx - (y-\sin y) dy]$, 其中 C 为区域 $0 < x < \pi, 0 < y < \sin x$ 的边界, 并且积分时的围绕方向为正.

解 由于 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x (\sin y - y) - e^x \sin y = -ye^x$,

$$\begin{aligned}
\text{故有 } \oint_C e^x [(1-\cos y) dx - (y-\sin y) dy] &= - \iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \sin x}} ye^x dx dy = - \int_0^\pi e^x dx \int_0^{\sin x} y dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\pi e^x \sin^2 x dx = -\frac{1}{4} \left(\int_0^\pi e^x dx - \int_0^\pi e^x \cos 2x dx \right) \\
&= -\frac{1}{4} \left[(e^\pi - 1) - \frac{\cos 2x + 2 \sin 2x}{5} e^x \right]_0^\pi = -\frac{1}{5} (e^\pi - 1).
\end{aligned}$$

【4301】 $\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{(x^2+y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$.

解 由于 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{(x^2+y^2)} [(-2x \sin 2xy + 2y \cos 2xy) - (2y \cos 2xy - 2x \sin 2xy)] = 0$,

$$\text{故有 } \oint_{x^2+y^2=R^2} e^{(x^2+y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy) = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} 0 dx dy = 0.$$

【4302】 设 AmB 为连接点 $A(1,1)$ 和点 $B(2,6)$ 的直线段, AnB 是连接点 A, B 及坐标原点的抛物线

段,且该抛物线的轴垂直于 x 轴. 积分

$$I_1 = \int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy, \quad I_2 = \int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

相差多少?

解 由于
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2(x-y) - 2(x+y) = -4x,$$

故 I_1 与 I_2 之差为(利用格林公式)

$$\begin{aligned} I_2 - I_1 &= \oint_{AmBmA} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy = \iint_S (-4x) dx dy = \int_1^2 dx \int_{2x^2-x}^{5x^2-4} (-4x) dy \\ &= - \int_1^2 4x(-2x^2+6x-4) dx = (2x^4-8x^3+8x^2) \Big|_1^2 = -2, \end{aligned}$$

或 $I_1 - I_2 = 2$.

[4303] 计算曲线积分
$$\int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy,$$

其中 AmO 为由点 $A(a, 0)$ 至点 $O(0, 0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$.

提示 在 Ox 轴上连接点 $O(0, 0)$ 与点 $A(a, 0)$, 这样, 便构成封闭的半圆形 $AmOA$, 利用格林公式即易获解.

解 在 Ox 轴上连接点 $O(0, 0)$ 与点 $A(a, 0)$, 这样, 便构成封闭的半圆形 $AmOA$, 且在线段 OA 上,

$$\int_{OA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = 0.$$

从而, $\oint_{AmOA} = \int_{AmO} + \int_{OA} = \int_{AmO}$. 另一方面, 利用格林公式可得

$$\oint_{AmOA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \iint_{x^2+y^2 \leq ax} m dx dy = \frac{\pi m a^2}{8}.$$

于是,
$$\int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \frac{\pi m a^2}{8}.$$

[4304] 计算曲线积分
$$\int_{AmB} [\varphi(y)e^x - my] dx + [\varphi'(y)e^x - m] dy,$$

式中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数, AmB 为连接点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 的任意路径, 但要求此路径与线段 AB 一起围成具有已知面积 S 的区域 $AmBA$.

提示 连接点 B 与点 A , 构成封闭围线 $AmBA$, 利用格林公式并注意

$$\int_{BA} [\varphi(y)e^x - my] dx + [\varphi'(y)e^x - m] dy = \int_{BA} d[e^x \varphi(y)] - \int_{BA} m(y dx + dy)$$

即易获解. 利用此题的结果可计算 4303 题.

解 首先, 我们有 $\oint_{AmBA} = \int_{AmB} + \int_{BA}$, 而

$$\oint_{AmBA} [\varphi(y)e^x - my] dx + [\varphi'(y)e^x - m] dy = \iint_S m dx dy = mS.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} &\int_{BA} [\varphi(y)e^x - my] dx + [\varphi'(y)e^x - m] dy = \int_{BA} d[e^x \varphi(y)] - \int_{BA} m(y dx + dy) \\ &= e^x \varphi(y) \Big|_{(x_2, y_2)}^{(x_1, y_1)} - m \int_{x_2}^{x_1} \left[y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right] dx \\ &= e^{x_1} \varphi(y_1) - e^{x_2} \varphi(y_2) - m \left(y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x_1 - x_2) + \frac{m}{2} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_2 - x_1)^2 \\ &= e^{x_1} \varphi(y_1) - e^{x_2} \varphi(y_2) + m(y_2 - y_1) + \frac{m}{2} (x_2 - x_1)(y_2 + y_1). \end{aligned}$$

于是,
$$\int_{AmB} [\varphi(y)e^x - my] dx + [\varphi'(y)e^x - m] dy$$

$$= mS + e^{i2} \varphi(y_2) - e^{i1} \varphi(y_1) - m(y_2 - y_1) = \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1).$$

注 利用此题的结果可计算 4303 题. 事实上, 由于 $\varphi(y) = \sin y, x_1 = a, y_1 = 0, x_2 = y_2 = 0, S = \frac{\pi a^2}{8}$, 代入即得

$$\int_{\text{Am}(\Gamma)} (e^i \sin y - my) dx + (e^i \cos y - m) dy = \frac{\pi m a^2}{8}.$$

【4305】* 求二阶可微的两个连续函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$, 使得曲线积分

$$I = \oint_C P(x+\alpha, y+\beta) dx + Q(x+\alpha, y+\beta) dy$$

对于任何封闭的围线 C 与常数 α 和 β 无关.

解 由格林公式, 得

$$I = \iint_S \left[\frac{\partial Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial x} - \frac{\partial P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial y} \right] dx dy = \tau. \quad (1)$$

由假定 τ 为一常数, 它与 α, β 无关 (只与围线 C 有关), 上式中的 S 表围线 C 所围成的闭区域. 由假定 P, Q 具有连续的二阶偏导数, 故 (1) 式中二重积分的被积函数具有关于 α, β 的一阶连续偏导数. 因此, 可以在积分号下关于 α, β 求偏导数, 得

$$\iint_S \left[\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \alpha \partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \alpha \partial y} \right] dx dy = \frac{\partial}{\partial \alpha} \tau = 0. \quad (2)$$

$$\iint_S \left[\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \beta \partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \beta \partial y} \right] dx dy = \frac{\partial}{\partial \beta} \tau = 0. \quad (3)$$

于是, (2) 式和 (3) 式对任何 α, β 以及任何 S 都成立. 再注意到 (2) 式和 (3) 式中二重积分的被积函数都是连续的, 故被积函数必恒为零 (参看 4097 题, 此题对二重积分也成立):

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \alpha \partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \alpha \partial y} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \beta \partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \beta \partial y} = 0. \quad (5)$$

(对任何 x, y, α, β). 记 $x+\alpha=u, y+\beta=v$, 显然有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \alpha \partial x} &= \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \alpha \partial y} &= \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial u \partial v}, \\ \frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \beta \partial x} &= \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial v \partial u}, & \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \beta \partial y} &= \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

于是, (4) 式与 (5) 式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} \right] &= \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial u \partial v} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} \right] &= \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial v^2} = 0 \end{aligned}$$

(对任何 u, v), 由此可知: $\frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} = k$ (常数).

将 u, v 改记为 x, y 则上式为

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = k \text{ (常数)}. \quad (6)$$

令 $u(x, y) = \int_0^x P(t, y) dt$, 则 $u(x, y)$ 具有连续的二阶偏导数, 且

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y). \quad (7)$$

由 (6) 式知: $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = k + \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = k + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) = k + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right).$

两端积分, 得

$$Q(x, y) = kx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \varphi(y), \quad (8)$$

其中 $\varphi(y)$ 为具有二阶连续导数的任意函数. 由(7), (8)两式又知 $u(x, y)$ 具有连续的二阶偏导数.

反之, 若 $u(x, y)$ 是任一具有三阶连续偏导数的函数, 而 $\varphi(y)$ 是任一具有二阶连续导数的函数, 则由(7)式和(8)式确定的 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 必具连续二阶偏导数, 且使(6)式成立, 从而使

$$\begin{aligned} I &= \oint_C P(x+\alpha, y+\beta) dx + Q(x+\alpha, y+\beta) dy - \iint_S \left[\frac{\partial Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial x} - \frac{\partial P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial y} \right] dx dy \\ &\quad - \iint_S k dx dy = kS, \end{aligned}$$

故 I 是与 α, β 无关的常数(对于任意固定的 C).

综上所述, 可知: 使曲线积分 I 对于任何封闭围线 C 与常数 α, β 无关的二阶连续可微函数 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 的全体由公式(7)与(8)给出, 其中 k 为常数, $u(x, y)$ 为三阶连续可微的任一函数, $\varphi(y)$ 为二阶连续可微的任意一个一元函数.

【4306】 为了使曲线积分 $\int_{\gamma \cup \beta} F(x, y)(y dx + x dy)$ 与积分路径的形状无关, 可微函数 $F(x, y)$ 应满足怎样的条件?

解 由于 $P=yF(x, y), Q=xF(x, y)$, 故由格林公式知所求的条件为 $\frac{\partial}{\partial x}[xF(x, y)] = \frac{\partial}{\partial y}[yF(x, y)]$, 即

$$xF'_x(x, y) = yF'_y(x, y).$$

【4307】 计算

$$I = \oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

其中 C 为不经过坐标原点的简单封闭围线, 且积分时的环绕方向为正.

提示 研究两种情况: (1) 坐标原点在围线 C 之外, (2) 围线 C 包围坐标原点.

解 令 $P = \frac{y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$. 易知, 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, 恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

今分两种情况讨论:

(1) 坐标原点在围线 C 之外, 这时, 在由 C 围成的有界闭区域 S 上, P 与 Q 以及它们的偏导数都连续, 故可应用格林公式, 得

$$I = \oint_C P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

(2) 围线 C 包围坐标原点. 这时, 由于 P, Q 在原点无定义, 故不能直接对由 C 围成的区域应用格林公式. 今取 $a > 0$ 充分小, 使中心在原点半径为 a 的圆周 $L_a (L_a: x^2 + y^2 = a^2)$ 完全位于围线 C 之内. 用 S_a 表介于 C 和 L_a 之间的环形闭区域. 显然, 在 S_a 上, P, Q 及其偏导数均连续, 故可应用格林公式, 得

$$\left(\oint_C + \oint_{L_a} \right) P dx + Q dy - \iint_{S_a} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

其中 $-\oint_{L_a}$ 表沿 L_a 的负方向(即顺时针方向).

于是, $I = \oint_C P dx + Q dy = \oint_{L_a} P dx + Q dy$, 其中 L_a 沿正方向(即逆时针方向). 利用 L_a 的参数方程 $x = acost, y = asint$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 即得

$$I = \oint_{L_a} P dx + Q dy = \oint_{L_a} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} [(acost)(acost) - asint(-asint)] dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

利用曲线积分计算由下列曲线所围的面积:

【4308】 椭圆 $x = acost, y = bsint$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

解 面积为 $S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab.$

【4309】 星形线 $x = a\cos^3 t, y = b\sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

解 面积为 $S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{3ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t) dt = \frac{3}{8} ab \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{8} \pi ab$.

【4310】 抛物线 $(x+y)^2 = ax$ ($a > 0$) 和轴 Ox .

解题思路 令 $y = tx$, 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{a}{(1+t)^2}, \quad y = \frac{at}{(1+t)^2} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

它与 Ox 轴的交点为 $(a, 0)$ 及 $(0, 0)$.

注意在 Ox 轴上从点 $(0, 0)$ 到点 $(a, 0)$ 的一段上, 有 $x dy - y dx = 0$; 而在抛物线这一段上, 则有

$$x dy - y dx = \frac{a^2}{(1+t)^4} dt \quad (0 \leq t \leq +\infty),$$

从而, 问题易获解.

解 作代换 $y = tx$, 则原方程化为 $x^2(1+t)^2 = ax$. 从而, 曲线的参数方程为

$$x = \frac{a}{(1+t)^2}, \quad y = \frac{at}{(1+t)^2} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

它与 Ox 轴的交点为 $(a, 0)$ 与 $(0, 0)$. 在 Ox 轴上从点 $(0, 0)$ 到点 $(a, 0)$ 的一段上, 有

$$x dy - y dx = 0.$$

在抛物线上, 有

$$x dy - y dx = \frac{a^2}{(1+t)^4} dt.$$

于是, 面积为 $S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^4} = -\frac{a^2}{6} \frac{1}{(1+t)^3} \Big|_0^{+\infty} = \frac{a^2}{6}$.

【4311】 笛卡儿叶形线 $x^3 + y^3 - 3axy$ ($a > 0$).

解题思路 令 $y = tx$, 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3} \quad (0 \leq t \leq +\infty),$$

且有 $x dy - y dx = \frac{9a^2 t^2}{(1+t^3)^2} dt$ ($0 \leq t \leq +\infty$). 从而, 问题可获解.

解 作代换 $y = tx$, 则得曲线的参数方程为 $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

由于 $dx = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} dt, dy = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} dt$, 从而, $x dy - y dx = \frac{9a^2 t^2}{(1+t^3)^2} dt$.

于是, 面积为 $S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{9a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt = \frac{3a^2}{2} \left[-\frac{1}{1+t^3} \right]_0^{+\infty} = \frac{3a^2}{2}$.

【4312】 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

解题思路 利用极坐标 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, 得双纽线的方程为 $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, 故有

$$x = a\cos\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad y = a\sin\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

及在曲线上, $x dy - y dx = a^2 \cos 2\varphi d\varphi$; 在 Ox 轴上, $x dy - y dx = 0$.

注意, 对应于 $\frac{1}{4}$ 的面积 (第一象限内) 部分有 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. 从而, 问题易获解.

解 考虑到对称性, 只需求曲线所围的区域的 $\frac{1}{4}$ 面积 (位于第一象限). 利用极坐标 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, 得双纽线的方程为 $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, 故

$$x = a\cos\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad y = a\sin\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

从而, 在曲线上 $x dy - y dx = a^2 \cos 2\varphi d\varphi$; 在 Ox 轴上, $x dy - y dx = 0$, 且 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 于是, 面积为

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2.$$

【4313】 曲线 $x^3 + y^3 - x^2 + y^2$ 及坐标轴.

解题思路 令 $y=tx$, 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{1+t^2}{1+t^3}, \quad y = \frac{t(1+t^2)}{1+t^3} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

曲线的起点为 $(1,0)$, 终点为 $(0,1)$. 注意在曲线段上, 有

$$x dy - y dx = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2} dt \quad (0 \leq t < +\infty);$$

而在 Oy 轴上从点 $(0,1)$ 到点 $(0,0)$ 一段, 以及在 Ox 轴上从点 $(0,0)$ 到点 $(1,0)$ 的一段上, 均有 $x dy - y dx = 0$. 再注意利用 3853 题的结果, 问题即可获解.

解 作代换 $y=tx$, 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{1+t^2}{1+t^3}, \quad y = \frac{t(1+t^2)}{1+t^3} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

曲线的起点为 $(1,0)$, 终点为 $(0,1)$. 在曲线段上,

$$x dy - y dx = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2} dt \quad (0 \leq t < +\infty).$$

在 Oy 轴上从点 $(0,1)$ 到 $(0,0)$ 一段, 以及在 Ox 轴上从点 $(0,0)$ 到点 $(1,0)$ 一段上, 均有 $x dy - y dx = 0$. 于是, 面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(1+t^3)^2} dt + 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^2} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} B\left(2 - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} B(1, 1) + \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, 2 - \frac{1}{3}\right) \right]^{**} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

*) 利用 3853 题的结果.

【4314】 计算由曲线 $(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m$ ($a>0, n>0, m>0$) 所围的面积.

解题思路 令 $y=tx$, 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{at^m}{(1+t)^{n+m+1}}, \quad y = \frac{at^{m+1}}{(1+t)^{n+m+1}} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

注意 $x dy - y dx = \frac{a^2 t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}} t \quad (0 \leq t < +\infty)$, 并利用 3852 题的结果, 问题即可获解.

解 作代换 $y=tx$, 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{at^m}{(1+t)^{n+m+1}}, \quad y = \frac{at^{m+1}}{(1+t)^{n+m+1}} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

从而,

$$x dy - y dx = \frac{a^2 t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}} dt \quad (0 \leq t < +\infty)$$

于是, 面积为 $S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}} dt = \frac{a^2}{2} B(2m+1, 2n+1)^{**}$.

*) 利用 3852 题的结果.

【4315】 计算由曲线 $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$ ($a>0, b>0, n>0$) 和坐标轴所围的面积.

解题思路 令 $x = a \cos^{\frac{2}{n}} \varphi$, $y = b \sin^{\frac{2}{n}} \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$), 即得

$$x dy - y dx = \frac{2}{n} ab \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}) \quad (\text{在曲线上}).$$

曲线与坐标轴交于点 $(a, 0)$ 及点 $(0, b)$. 注意在 Oy 轴上从点 $(0, b)$ 到点 $(0, 0)$ 的一段, 以及在 Ox 轴上从点 $(0, 0)$ 到点 $(a, 0)$ 的一段上, 均有 $x dy - y dx = 0$. 再注意利用 3856 题的结果, 问题即可获解.

解 作代换 $x = a \cos^{\frac{2}{n}} \varphi$, $y = b \sin^{\frac{2}{n}} \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$), 即得

$$x dy - y dx = \frac{2ab}{n} \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi.$$

曲线与坐标轴交于点 $(a, 0)$ 和点 $(0, b)$. 在 Oy 轴上, 从点 $(0, b)$ 到点 $(0, 0)$ 一段, 以及在 Ox 轴上从点 $(0, 0)$ 到点 $(a, 0)$ 一段上, 显然有 $x dy - y dx = 0$. 于是, 面积为

$$S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2ab}{n} \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi = \frac{ab}{n} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{ab}{2n} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$$

*) 利用 3856 题的结果.

【4316】 计算由曲线 $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$ ($a > 0, b > 0, n > 1$) 和坐标轴所围的面积.

解题思路 令 $y = \frac{b}{a}xt$, 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{a(1+t^{n-1})}{1+t^n}, \quad y = \frac{bt(1+t^{n-1})}{1+t^n} \quad (0 < t < +\infty).$$

易知在两坐标轴上, 有 $x dy - y dx = 0$; 及在曲线上, 有 $x dy - y dx = ab \frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2} dt$ ($0 < t < +\infty$). 并利用 3853 题的结果, 问题即可获解.

解 作代换 $y = \frac{b}{a}xt$ 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{a(1+t^{n-1})}{1+t^n}, \quad y = \frac{bt(1+t^{n-1})}{1+t^n} \quad (0 < t < +\infty).$$

易知

$$x dy - y dx = ab \frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2} dt.$$

又在两坐标轴上, 显然有 $x dy - y dx = 0$. 于是, 面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{ab}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2} dt \\ &= \frac{ab}{2} \left[\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n-2}}{(1+t^n)^2} dt + 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(1+t^n)^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^n)^2} dt \right] \\ &= \frac{ab}{2} \left[\frac{1}{n} B\left(2 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n} B(1, 1) + \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \frac{ab}{n} \left[1 + B\left(2 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \right] = \frac{ab}{n} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} \right] = \frac{ab}{n} \left[1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \right]. \end{aligned}$$

*) 利用 3853 题的结果.

【4317】 计算由曲线 $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c \left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n$ ($a > 0, b > 0, c > 0, n > 0$) 所围的面积.

提示 仿 4316 题.

解 作代换 $y = \frac{b}{a}xt$, 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{act^n}{1+t^{2n+1}}, \quad y = \frac{bct^{n+1}}{1+t^{2n+1}} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

易知 $x dy - y dx = \frac{abc^2 t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2} dt$. 于是, 面积为

$$S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{abc^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2} dt = \frac{abc^2}{2(2n+1)} \cdot \frac{1}{1+t^{2n+1}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{abc^2}{2(2n+1)}.$$

【4318】 一个半径为 r 的圆周沿半径为 R 的固定圆周外部滚动而无滑动, 动圆周上的一点所描绘的曲线称为外摆线. 假定比值 $\frac{R}{r} = n$ 是整数 ($n \geq 1$), 求外摆线所围的面积. 研究特殊情况 $r = R$ (心脏线).

解 取定圆的中心 O 作坐标原点, 取 Ox 轴通过点 A , 点 A 是动点的始点, 即为两圆的公切点时的位置 (图 8.65). 当动圆滚到如图的新位置时, 点 A 移到点 M . 动点 M 的轨迹便是外摆线, 其方程推导如下: 设动圆的圆心为 C , 两圆的切点为 B , 记 $\angle MCB = t$ (运动开始时, 设 t 等于零). 切点在定圆上所移过的弧 \widehat{AB} 应等于它在动圆上所移过的弧 \widehat{MB} , 即

$$R \cdot \angle AOB = \frac{R}{n} \cdot \angle MCB = \frac{R}{n} t.$$

从而, $\angle AOB = \frac{t}{n}$. 设动点 M 的坐标为 (x, y) , 则

$$x - OG = OE + FM = \left(R + \frac{R}{n}\right) \cos \frac{t}{n} + \frac{R}{n} \sin \angle FCM,$$

但 $\angle FCM = \angle BCM - \angle OCE$, 且 $\angle OCE = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{n}$, 从而,

$$\angle FCM = \left(1 + \frac{1}{n}\right)t - \frac{\pi}{2}, \quad \sin \angle FCM = -\cos\left(1 + \frac{1}{n}\right)t.$$

于是, 最后得 $x = R\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{t}{n} - \frac{R}{n} \cos\left(1 + \frac{1}{n}\right)t$.

类似地, 可求得 $y = R\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{t}{n} - \frac{R}{n} \sin\left(1 + \frac{1}{n}\right)t$.

若记 $\varphi = \frac{t}{n}$, 并注意到 $R = nr$, 则外摆线可用如下的参数方程表示:

$$x = (n+1)r \cos \varphi - r \cos(n+1)\varphi, \quad y = (n+1)r \sin \varphi - r \sin(n+1)\varphi.$$

由 $R = nr$ 知, 当动圆滚 n 圈后, 起点与终点重合, 即 φ 的变化范围为 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. 注意到

$$x dy - y dx = r^2 (n+1)(n+2)(1 - \cos n\varphi) d\varphi,$$

于是, 所求的面积为 $S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{r^2 (n+1)(n+2)}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos n\varphi) d\varphi - \pi r^2 (n+1)(n+2)$.

特别是, 当 $r = R$ 时, 即 $n = 1$, 则得心脏线的面积为 $S = 6\pi r^2$.

【4319】 一个半径为 r 的圆周沿半径为 R 的固定圆周内部滚动而无滑动, 动圆周上的一点所描绘的曲线称为内摆线. 假定比值 $\frac{R}{r} = n$ 是整数 ($n \geq 2$), 求内摆线所围的面积. 研究特殊情况 $r = \frac{R}{4}$ (星形线).

解 仿上题, 容易求得内摆线的参数方程为

$$x = R\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cos \frac{t}{n} + \frac{R}{n} \cos\left(1 - \frac{1}{n}\right)t, \quad y = R\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin \frac{t}{n} + \frac{R}{n} \sin\left(1 - \frac{1}{n}\right)t.$$

若以 $\varphi = \frac{t}{n}$ 为参数, 并注意到 $R = nr$, 则得

$$x = (n-1)r \cos \varphi + r \cos(n-1)\varphi, \quad y = (n-1)r \sin \varphi + r \sin(n-1)\varphi.$$

注意到

$$x dy - y dx = r^2 (n-1)(n-2)(1 - \cos n\varphi) d\varphi,$$

于是, 所求的面积为 $S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{r^2 (n-1)(n-2)}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos n\varphi) d\varphi - \pi r^2 (n-1)(n-2)$.

特别是, 当 $\frac{R}{r} = 4$ 时, 即 $n = 4$, 则得星形线所围的面积为 $S = 6\pi r^2$.

【4320】 计算圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 被曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 所截那部分的面积.

解 两曲面的交线为 $x^2 + y^2 = ax, \quad z^2 = a^2 - ax$.

若将平面 Oxy 上的圆周 $x^2 + y^2 = ax$ 记以 C , 其弧长记以 s , 则所求的面积显然可表为

$$S = 2 \oint_C \sqrt{a^2 - ax} ds.$$

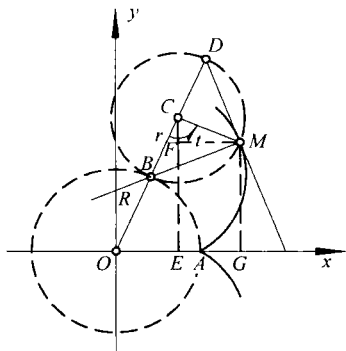


图 8.65

由于 $x^2 + y^2 = ax$ 即为 $\left(x - \frac{a}{2}\right) + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, 故令

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \varphi, \quad y = \frac{a}{2} \sin \varphi,$$

从而, 弧长的微分为 $ds = \frac{a}{2} d\varphi$. 于是, 面积为

$$S = 2 \oint_C \sqrt{a^2 - ax} \, ds - 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a}{2}(1 - \cos \varphi)} \cdot \frac{a}{2} d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} a^2 \sin \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 4a^2.$$

【4321】 计算

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2},$$

若 $X = ax + by, Y = cx + dy$, 且 C 为包围坐标原点的简单封闭围线 ($ad - bc \neq 0$).

解 首先注意, 由于 $ad - bc \neq 0$, 故只有原点 $(0, 0)$ 使 $X^2 + Y^2 = 0$. 易知

$$XdY - YdX = (ax + by)(cdx + ddy) - (cx + dy)(adx + bdy) = (ad - bc)(xdy - ydx),$$

故

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = \frac{1}{2\pi} \oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

其中

$$P = -\frac{(ad - bc)y}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2}, \quad Q = \frac{(ad - bc)x}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2}.$$

容易算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{(ad - bc)[(a^2 + c^2)x^2 - (b^2 + d^2)y^2]}{[(ax + by)^2 + (cx + dy)^2]^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0) \text{ 时}),$$

故由格林公式知

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \oint_{C'} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

其中 C' 可为包围原点 $(0, 0)$ 的任一位于 C 内的围线. 特别是, 可取 C' 为围线 $(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = r^2$ (即 $X^2 + Y^2 = r^2$), $r > 0$ 充分小. 于是, 得 (利用格林公式)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = \frac{1}{2\pi} \oint_{X^2 + Y^2 = r^2} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi r^2} \oint_{X^2 + Y^2 = r^2} XdY - YdX = \frac{ad - bc}{2\pi r^2} \oint_{X^2 + Y^2 = r^2} xdy - ydx \\ &= \frac{ad - bc}{2\pi r^2} \iint_{X^2 + Y^2 \leq r^2} 2dx dy = \frac{ad - bc}{\pi r^2} \iint_{X^2 + Y^2 \leq r^2} \left| \frac{D(x, y)}{D(X, Y)} \right| dXdY. \end{aligned}$$

由于 $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = ad - bc$, 故 $\frac{D(x, y)}{D(X, Y)} = \frac{1}{ad - bc}$. 于是, 代入上式得

$$I = \frac{ad - bc}{\pi r^2} \iint_{X^2 + Y^2 \leq r^2} \frac{1}{|ad - bc|} dXdY = \frac{ad - bc}{\pi r^2} \cdot \frac{1}{|ad - bc|} \pi r^2 = \operatorname{sgn}(ad - bc).$$

【4322】 若简单的围线 C 包围坐标原点, $X = \varphi(x, y), Y = \psi(x, y)$, 而曲线 $\varphi(x, y) = 0$ 和 $\psi(x, y) = 0$ 在围线 C 以内有几个单交点, 计算积分 I (参阅 4321 题).

解 设 $\varphi(x, y) = 0, \psi(x, y) = 0$ 在 C 内的交点为 $P_i(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, m)$. 首先注意, 本题应假定函数 $\varphi(x, y)$ 与 $\psi(x, y)$ 在 C 围成的区域内具有连续的二阶偏导数, 并且在各点 $P_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 处有 $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \varphi'_x \psi'_y - \varphi'_y \psi'_x \neq 0$. 容易算得

$$XdY - YdX = (\varphi \psi'_x - \varphi'_x \psi)dx + (\varphi \psi'_y - \varphi'_y \psi)dy,$$

从而,

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = \frac{1}{2\pi} \oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

其中

$$P = \frac{\varphi \psi'_x - \varphi'_x \psi}{\varphi^2 + \psi^2}, \quad Q = \frac{\varphi \psi'_y - \varphi'_y \psi}{\varphi^2 + \psi^2}.$$

又可算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{(\varphi^2 + \psi^2)^2} [(\varphi\psi''_{xy} - \varphi''_{xy}\psi)(\varphi^2 + \psi^2) - (\varphi'_x\psi'_y + \varphi'_y\psi'_x)\varphi^2 + (\varphi'_x\psi'_x + \varphi'_y\psi'_y)\psi^2 + 2(\varphi'_x\varphi'_y - \psi'_x\psi'_y)\varphi\psi]$$

$$((x, y) \neq (x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, m)).$$

围绕点 $P_i(x_i, y_i)$ 作围线 $C_i: [\varphi(x, y)]^2 + [\psi(x, y)]^2 = r^2$ (即 $X^2 + Y^2 = r^2$), 取 $r > 0$ 充分小, 使诸 C_i 互不相交且都位于 C 内 (这是办得到的, 因为在各点 $P_i, \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \neq 0$. 从而, 由连续性知, 在 P_i 的某邻域内 $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \neq 0$ 且保持定号. 于是, 根据隐函数存在定理知, 变换 $X = \varphi(x, y), Y = \psi(x, y)$ 在点 $(x, y) = (x_i, y_i)$ 邻近及点 $(X, Y) = (0, 0)$ 邻近是双方单值双方连续的), 并使 $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$ 在 P_i 的邻近 $X^2 + Y^2 \leq r^2$ (记为 S_i) 上保持定号, 将格林公式应用于诸围线 C, C_1, \dots, C_m 之间的区域, 可得

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \sum_{i=1}^m \oint_{C_i} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

故

$$I = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \oint_{C_i} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}. \quad (1)$$

但

$$\begin{aligned} \oint_{C_i} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} &= \frac{1}{r^2} \oint_{C_i} XdY - YdX = \frac{1}{r^2} \oint_{C_i} (\varphi\psi'_x - \varphi'_x\psi)dx + (\varphi\psi'_y - \varphi'_y\psi)dy \\ &= \frac{1}{r^2} \iint_{S_i} 2(\varphi'_x\psi'_y - \varphi'_y\psi'_x)dx dy = \frac{2}{r^2} \iint_{S_i} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} dx dy = \frac{2}{r^2} \left(\operatorname{sgn} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right)_{P_i} \iint_{S_i} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} dx dy \\ &= \frac{2}{r^2} \left(\operatorname{sgn} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right)_{P_i} \iint_{X^2 + Y^2 \leq r^2} dXdY = \frac{2}{r^2} \left(\operatorname{sgn} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right)_{P_i} \cdot \pi r^2 = 2\pi \left(\operatorname{sgn} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \right)_{P_i}, \end{aligned}$$

代入(1)式, 即得

$$I = \sum_{i=1}^m \left(\operatorname{sgn} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \right)_{P_i},$$

或写为

$$I = \sum \operatorname{sgn} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)},$$

其中 \sum 的是对曲线 $\varphi(x, y) = 0$ 与 $\psi(x, y) = 0$ 在 C 内的各交点相加.

注 显然, 4321 题是 4322 题的特例. 这时, 曲线 $ax + by = 0$ 与 $cx + dy = 0$ 在 C 内只有一个交点, 即原点 $(0, 0)$, 而 $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = ad - bc$.

【4323】 证明: 若 C 为封闭围线, l 为任意的方向, 则有

$$\oint_C \cos(l, n) ds = 0,$$

式中 n 为围线 C 的外法向量.

证 如图 8.66 所示. 不妨规定 C 的方向为逆时针的, 以 t 表示. 由于夹角

$$(l, n) = (l, x) - (n, x),$$

故得 $\cos(l, n) = \cos(l, x)\cos(n, x) + \sin(l, x)\sin(n, x)$.

但是, $\sin(n, x) = \sin\left[(t, x) - \frac{\pi}{2}\right] = -\cos(t, x)$,

$$\cos(n, x) = \cos\left[(t, x) - \frac{\pi}{2}\right] = \sin(t, x),$$

且 $\cos(t, x) = \frac{dx}{ds}$, $\sin(t, x) = \frac{dy}{ds}$, 因此, 有

$$\cos(l, n) ds = \cos(l, x) dy - \sin(l, x) dx.$$

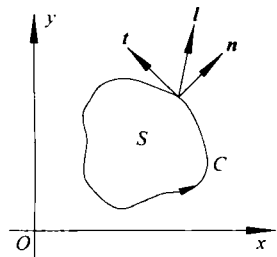


图 8.66

再利用格林公式,并注意到 $\sin(l, x)$ 和 $\cos(l, x)$ 均为常数, 即得

$$\oint_C \cos(l, \mathbf{n}) ds = \oint_C [\sin(l, x) dx + \cos(l, x) dy] = \iint_S 0 dx dy = 0.$$

【4324】 求积分
$$I = \oint_C [x \cos(\mathbf{n}, x) + y \cos(\mathbf{n}, y)] ds$$

之值, 式中 C 为有界区域 S 的边界, 它是简单封闭曲线, \mathbf{n} 为它的外法向量.

解 如 4323 题所述, 已知

$$\cos(\mathbf{n}, x) = \cos\left[(t, x) - \frac{\pi}{2}\right] = \sin(t, x) = \frac{dy}{ds},$$

$$\cos(\mathbf{n}, y) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\mathbf{n}, x)\right] = \sin(\mathbf{n}, x) = \sin\left[(t, x) - \frac{\pi}{2}\right] = -\cos(t, x) = -\frac{dx}{ds}.$$

于是,
$$I = \oint_C x dy - y dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = 2S.$$

这里 S 为封闭曲线 C 所围的面积.

【4325】 求
$$\lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) ds,$$

其中 S 为包围点 (x_0, y_0) 的围线 C 所围的面积, $d(S)$ 为区域 S 的直径, \mathbf{n} 为围线 C 的单位外法向量, $\mathbf{F} = \{X, Y\}$ 为 $S+C$ 上的连续可微向量.

解 由 4323 题的推导过程中知, 向量 \mathbf{n} 在坐标轴上的投影为

$$n_x = \cos(\mathbf{n}, x) = \frac{dy}{ds}, \quad n_y = \cos(\mathbf{n}, y) = -\frac{dx}{ds}.$$

于是,
$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) ds = (X n_x + Y n_y) ds = X dy - Y dx.$$

因此, 利用格林公式有

$$\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) ds = \oint_C X dy - Y dx = \iint_S \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \Big|_{(\xi, \eta)} \cdot S,$$

其中点 $(\xi, \eta) \in$ 区域 S . 于是,

$$\lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) ds = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \Big|_{(\xi, \eta)} = X'_x(x_0, y_0) + Y'_y(x_0, y_0).$$

§ 13. 曲线积分在物理学上的应用

【4326】 均匀分布在圆 $x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$ 的上半部的质量 M 以怎样的力吸引位于 $(0, 0)$ 质量为 m 的质点?

解 由对称性知, 引力在 Ox 轴上的投影 $X=0$, 故只要计算引力在 Oy 轴上的投影.

设圆心角为 θ , 由 $ds = a d\theta$ 知, 对于长为 ds 一段圆弧吸引质量为 m 的质点的力在 Oy 轴上的投影为

$$dY = \frac{kmM}{a^2} \sin\theta \cdot a d\theta = \frac{kmM}{\pi a^2} \sin\theta d\theta.$$

其中 k 为引力常数.

于是, 所求的引力在 Oy 轴上的投影为

$$Y = \frac{kmM}{\pi a^2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{2kmM}{\pi a}.$$

【4327】 计算单层的对数势
$$u(x, y) = \oint_C \kappa \ln \frac{1}{r} ds,$$

式中 κ —常数, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$, 设围线 C 是圆周 $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

解 由对称性知,单层的对数势为

$$u(x, y) - 2\kappa \int_0^\pi \ln \frac{1}{r} \cdot R d\theta = 2R\kappa \int_0^\pi \ln \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2R\rho \cos\theta + \rho^2}} d\theta \\ - R\kappa \int_0^\pi \ln R^2 \left[1 - 2 \frac{\rho}{R} \cos\theta + \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \right] d\theta,$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\xi x + \eta y = R\rho \cos\theta$, 而 θ 是向量 $\mathbf{r} = xi + yj$ 与 $\mathbf{r}_0 = R + \eta j$ 的正向夹角.

利用 3733 题(或 2192 题)的结果,可得

$$\int_0^\pi \ln \left[1 - 2 \frac{\rho}{R} \cos\theta + \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \right] d\theta = \begin{cases} 0, & \rho \leq R, \\ 2\pi \ln \frac{\rho}{R}, & \rho > R. \end{cases}$$

$$\text{于是,我们有 } u(x, y) = -2R\kappa \int_0^\pi \ln R d\theta - R\kappa \int_0^\pi \ln \left[1 - 2 \frac{\rho}{R} \cos\theta + \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \right] d\theta = \begin{cases} 2\pi R\kappa \ln \frac{1}{R}, & \rho \leq R, \\ 2\pi R\kappa \ln \frac{1}{\rho}, & \rho > R. \end{cases}$$

【4328】 采用极坐标 ρ 和 φ , 计算单层的对数势

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi \quad \text{和} \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi,$$

式中 r 为点 (ρ, φ) 与动点 $(1, \psi)$ 间的距离, m 为正整数.

解 由于

$$r = \sqrt{(\rho \cos\varphi - \cos\psi)^2 + (\rho \sin\varphi - \sin\psi)^2} = \sqrt{1 - 2\rho \cos(\psi - \varphi) + \rho^2},$$

于是,当 $\rho < 1$ 时,我们有

$$I_1 = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln [1 - 2\rho \cos(\psi - \varphi) + \rho^2] d\psi = -\frac{1}{2} \int_\varphi^{\varphi+2\pi} \cos(mu + m\varphi) \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\ = \frac{1}{2} \int_\varphi^{\varphi+2\pi} \cos m\varphi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du + \frac{1}{2} \int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi} \sin m\varphi \sin mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du.$$

因为上述右端两个积分中被积函数均为以 2π 为周期的函数,并注意奇偶函数在对称区间上的积分性质,则有

$$I_1 = -\cos m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du + \frac{\sin m\varphi}{2} \int_\pi^\pi \sin mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\ = -\cos m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du - (\cos m\varphi) \left(-\frac{\pi}{m} \rho^m \right) = \frac{\pi}{m} \rho^m \cos m\varphi^*.$$

同理,我们有

$$I_2 = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln [1 - 2\rho \cos(\psi - \varphi) + \rho^2] d\psi = -\frac{1}{2} \int_\varphi^{\varphi+2\pi} \sin(mu + m\varphi) \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\ = \frac{\cos m\varphi}{2} \int_\pi^\pi \sin mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du - \sin m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\ = -\sin m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du - (\sin m\varphi) \left(-\frac{\pi}{m} \rho^m \right) = \frac{\pi}{m} \rho^m \sin m\varphi.$$

当 $\rho > 1$ 时,则有

$$I_1 = -\cos m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du = -\cos m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln \rho^2 \left(1 - 2 \frac{1}{\rho} \cos u + \frac{1}{\rho^2} \right) du \\ = -\cos m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln \left(1 - 2 \frac{1}{\rho} \cos u + \frac{1}{\rho^2} \right) du = (\cos m\varphi) \left(-\frac{\pi}{m\rho^m} \right) = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi^{**},$$

同理,我们有 $I_2 = -\sin m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln \left(1 - 2 \frac{1}{\rho} \cos u + \frac{1}{\rho^2} \right) du = -(\sin m\varphi) \left(-\frac{\pi}{m\rho^m} \right) = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \sin m\varphi.$

对于 $\rho = 0$, 显然有

$$I_1 = I_2 = 0.$$

现在来研究当 $\rho = 1$ 的情况. 首先,积分

$$I_1 = \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du$$

对于 ρ 在区间 $[1, 1+\delta]$ 上是一致收敛的, 其中 δ 为很小的正数. 事实上, 对于充分小的 η , 当 u 在 $(0, \eta)$ 内取值时, 有

$$1 > 1 - 2\rho\cos u + \rho^2 = (1-\rho)^2 + 2\rho(1-\cos u) \geq 2(1-\cos u) > 0.$$

于是, 当 $1 \leq \rho \leq 1+\delta, u \in (0, \eta)$ 时, 有

$$\cos mu \ln(1-2\rho\cos u + \rho^2) \leq |\ln 2(1-\cos u)|.$$

而积分 $\int_0^\eta |\ln 2(1-\cos u)| du$ 是收敛的. 这是由于当 $0 < 2\beta < 1$, 有

$$\lim_{u \rightarrow 0} u^{2\beta} |\ln 2(1-\cos u)| = \lim_{u \rightarrow 0} -[2(1-\cos u)]^\beta \ln[2(1-\cos u)] \frac{u^{2\beta}}{2^\beta(1-\cos u)^\beta} = 0 \cdot 1 = 0.$$

于是, 积分

$$\int_0^\eta \cos mu \ln(1-2\rho\cos u + \rho^2) du$$

在 $1 \leq \rho \leq 1+\delta$ 上一致收敛, 故知积分

$$I_1 = \int_0^\pi \cos mu \ln(1-2\rho\cos u + \rho^2) du$$

在 $1 \leq \rho \leq 1+\delta$ 上一致收敛, 从而, I_1 作为参数 $\rho-1$ 的函数在 $\rho=1$ 是右连续的. 由此, 根据上面已求出 $\rho > 1$

时 $I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi$, 得知: 当 $\rho=1$ 时,

$$I_1 = \lim_{\rho \rightarrow 1+0} \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi = \frac{\pi}{m} \cos m\varphi.$$

同理, 可得

$$I_2 = \lim_{\rho \rightarrow 1+0} \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \sin m\varphi = \frac{\pi}{m} \sin m\varphi.$$

综上所述, 得

$$I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^m \cos m\varphi, \quad I_2 = \frac{\pi}{m} \rho^m \sin m\varphi, \quad 0 \leq \rho \leq 1;$$

$$I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi, \quad I_2 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \sin m\varphi, \quad \rho > 1.$$

*) 参看 И. М. 雷日克、И. С. 格拉德什坦编著的“函数表与积分表”3.765 公式 1.

**) 根据上面公式, 当 $\rho^2 > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \ln(1-2\rho\cos x + \rho^2) \cos \alpha x dx &= \int_0^\pi \ln \rho^2 \left(1-2\frac{1}{\rho}\cos x + \frac{1}{\rho^2}\right) \cos \alpha x dx \\ &= \int_0^\pi 2\ln \rho \cdot \cos \alpha x dx + \int_0^\pi \ln\left(1-2\frac{1}{\rho}\cos x + \frac{1}{\rho^2}\right) \cos \alpha x dx \\ &= \int_0^\pi \ln\left(1-2\frac{1}{\rho}\cos x + \frac{1}{\rho^2}\right) \cos \alpha x dx = -\frac{\pi}{\alpha} \rho^{-\alpha}, \end{aligned}$$

其中 α 为正整数.

【4329】 计算高斯积分

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds,$$

式中 $r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}$ 为向量 \mathbf{r} 的长度, 此向量连接点 $A(x, y)$ 和简单封闭光滑围线 C 上的动点 $M(\xi, \eta)$, (\mathbf{r}, \mathbf{n}) 为向量 \mathbf{r} 与曲线 C 在点 M 的外法向量 \mathbf{n} 之间的夹角.

解 设 \mathbf{n} 与 Ox 轴的夹角为 α , \mathbf{r} 与 Ox 轴的夹角为 β , 则 $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \alpha - \beta$. 于是,

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{\xi-x}{r} \cos \alpha + \frac{\eta-y}{r} \sin \alpha.$$

代入高斯积分, 得

$$u(x, y) = \oint_C \left(\frac{\eta-y}{r^2} \sin \alpha + \frac{\xi-x}{r^2} \cos \alpha \right) ds = \oint_C \frac{\xi-x}{r^2} d\eta - \frac{\eta-y}{r^2} d\xi.$$

令 $P = -\frac{\eta-y}{r^2}$, $Q = \frac{\xi-x}{r^2}$, 则有

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{-(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{r^4}, \quad \frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{-(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{r^4},$$

因而 P, Q 的偏导数除去点 A (此处 $r=0$) 外, 在全平面上是连续的, 并且 $\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{\partial P}{\partial \eta}$. 于是, 利用格林公式知: 当点 A 在曲线 C 之外时, 有

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = 0.$$

当点 A 在曲线 C 之内时, 则在曲线 C 内以 A 为圆心, R 为半径作一圆 l , 即得

$$u(x, y) = \oint_l \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = \oint_l \frac{1}{R} ds = 2\pi.$$

当点 A 在曲线 C 上时, 不妨利用关系式 $\frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = d\varphi$, 其中 $d\varphi$ 为从点 A 看曲线 C 上弧长的微分 ds 所张的角度. 今以 A 为圆心, r_1 为半径作一小圆, 交 C 于 B_1 及 B_2 两点, 将曲线 C 除去小圆内的部分记以 $\widehat{B_1 B_2}$, 则有

$$\int_{\widehat{B_1 B_2}} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = \int_{\widehat{B_1 B_2}} d\varphi = \angle B_1 A B_2.$$

于是, 我们有
$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = \lim_{r_1 \rightarrow 0} \int_{\widehat{B_1 B_2}} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = \lim_{r_1 \rightarrow 0} \angle B_1 A B_2 = \pi.$$

综上所述, 得高斯积分
$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = \begin{cases} 0, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 外,} \\ \pi, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 上,} \\ 2\pi, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 内.} \end{cases}$$

*) 参看 Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》538 目.

【4330】 采用极坐标系 ρ 和 φ , 计算双层的对数势

$$K_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} d\psi \quad \text{和} \quad K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} d\psi,$$

式中 r 为点 $A(\rho, \varphi)$ 和动点 $M(1, \psi)$ 之间的距离, (\mathbf{r}, \mathbf{n}) 为方向 $\overrightarrow{AM} = \mathbf{r}$ 与引自点 $O(0, 0)$ 的半径 $\overrightarrow{OM} = \mathbf{n}$ 之间的夹角, m 为正整数.

解 由题意知:

$$\frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} = \frac{(\cos\psi - \rho\cos\varphi)\cos\psi + (\sin\psi - \rho\sin\varphi)\sin\psi}{(\cos\psi - \rho\cos\varphi)^2 + (\sin\psi - \rho\sin\varphi)^2} = \frac{1}{1+\rho^2} \frac{\rho\cos(\psi-\varphi)}{2\rho\cos(\psi-\varphi)}.$$

从而, 当 $\rho < 1$ 时, $\frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} = \frac{1}{2}$. 又因 m 为正整数, 故此时有

$$K_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi d\psi = 0, \quad K_2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin m\psi d\psi = 0.$$

当 $\rho < 1$ 时, 因为级数 (利用 2968 题的结果)

$$\frac{1 - \rho\cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\psi - \varphi)$$

在 $[0, 2\pi]$ 上一致收敛, 乘 $\cos m(\psi - \varphi)$ 和 $\sin m(\psi - \varphi)$ 以后在 $[0, 2\pi]$ 上也一致收敛, 故可逐项积分. 于是,

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1 - \rho\cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)} d\psi \\ &= \int_0^{2\pi} [\cos m(\psi - \varphi) \cos m\varphi - \sin m(\psi - \varphi) \sin m\varphi] \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\psi - \varphi) \right] d\psi \\ &= \cos m\varphi \int_0^{2\pi} \cos m(\psi - \varphi) \rho^m \cos m(\psi - \varphi) d\psi \\ &= \rho^m \cos m\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2 m(\psi - \varphi) d\psi - \pi \rho^m \cos m\varphi. \end{aligned}$$

同理, 容易求得

$$K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{1 - \rho\cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)} d\psi = \pi \rho^m \sin m\varphi.$$

当 $\rho > 1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
K_1 &= \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)} d\psi - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)} d\psi \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{[1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)] + (1-\rho^2)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)} d\psi - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)} d\psi \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)} d\psi = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{(1-r^2) + [1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)]}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)} d\psi \\
&= -\int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1-r\cos(\psi-\varphi)}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)} d\psi = -\pi r^m \cos m\varphi = -\frac{\pi}{\rho^m} \cos m\varphi,
\end{aligned}$$

其中 $r=\rho^{-1}<1$.

同理,可求得

$$K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{1}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)} d\psi = -\frac{\pi}{\rho^m} \sin m\varphi.$$

综上所述,得

$$K_1 = \pi \rho^m \cos m\varphi, \quad K_2 = \pi \rho^m \sin m\varphi, \quad \rho < 1,$$

$$K_1 = K_2 = 0, \quad \rho = 1,$$

$$K_1 = -\frac{\pi}{\rho^m} \cos m\varphi, \quad K_2 = -\frac{\pi}{\rho^m} \sin m\varphi, \quad \rho > 1.$$

【4331】 若 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则称二阶可微函数 $u = u(x, y)$ 为调和函数, 证明: 当且仅当以下条件成立时, u 才是调和函数:

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0,$$

式中 C 为任意封闭围线, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿此围线之外法线方向的导数.

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\mathbf{n}, x),$$

而(参看 4323 题的推导)

$$\cos(\mathbf{n}, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \sin(\mathbf{n}, x) = -\frac{dx}{ds},$$

故利用格林公式(注意, 题中应假定 $u(x, y)$ 具有连续的二阶偏导数), 得

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_C \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx = \iint_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_S (\Delta u) dx dy,$$

其中 S 表由封闭曲线 C 围成的区域. 由此式知: $\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ (对任何封闭围线 C) 当且仅当 $\iint_S (\Delta u) dx dy = 0$

(对任何区域 S). 但易知这又相当于 $\Delta u \equiv 0$. 事实上, 若 $\Delta u = 0$, 则对任何 S , 有 $\iint_S (\Delta u) dx dy = 0$; 反之, 若对任

何 S , 有 $\iint_S (\Delta u) dx dy = 0$, 则必 $\Delta u = 0$. 因为, 若不然, 在某点 (x_0, y_0) , $\Delta u \neq 0$. 例如, 设在此点, $\Delta u > 0$, 则由连

续性可知, 必存在以 (x_0, y_0) 为中心, 半径为 r_0 (充分小) 的圆域 S_0 , 使在其上每一点, 都有 $\Delta u > 0$. 由此可知, $\iint_{S_0} (\Delta u) dx dy > 0$. 矛盾, 证毕.

$$\text{【4332】 证明: } \iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \iint_S u \Delta u dx dy + \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

式中光滑曲线 C 是有界区域 S 的边界.

证 由于

$$\begin{aligned}
\oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_C u \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\mathbf{n}, x) \right] ds = \oint_C u \frac{\partial u}{\partial x} dy - u \frac{\partial u}{\partial y} dx \\
&= \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy = \iint_S u \Delta u dx dy + \iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,
\end{aligned}$$

故得

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \iint_S u \Delta u dx dy + \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

【4333】 证明:若一函数在有界区域 S 内及其边界 C 上为调和函数,则此函数单值地由它在边界 C 上的值确定(参考 1332 题).

证 由题意知,我们只要证明:如有有界区域 S 上的两个调和函数 u_1 和 u_2 ,在其边界 C 上有相同的值,则它们在整个区域上恒等.这也就是要证明:若调和函数 $u = u_1 - u_2$ 在边界 C 上等于零,则它在整个区域上恒为零.事实上,利用 1332 题的结果,得

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0.$$

于是,在整个区域 S 上,有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

这表明,在 S 上 u 为常数.但在边界 C 上 $u = 0$,故在区域 S 上 $u = 0$,即 $u_1 = u_2$.

【4334】 证明平面上的格林第二公式

$$\iint_S \left(u \frac{\Delta v}{v} - \frac{\Delta u}{u} v \right) dx dy = \oint_C \left(\frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{u} \frac{\partial v}{v} \right) ds,$$

式中光滑闭线 C 是有界区域 S 的边界, $\frac{\partial}{\partial n}$ 为沿 C 的外法线方向的导数.

证 我们有

$$\begin{aligned} \oint_C v \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_C v \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(n, x) \right] ds = \oint_C v \frac{\partial u}{\partial x} dy - v \frac{\partial u}{\partial y} dx \\ &= \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \iint_S v \Delta u dx dy. \end{aligned}$$

同理,有

$$\begin{aligned} \oint_C u \frac{\partial v}{\partial n} ds &= \oint_C u \frac{\partial v}{\partial x} dy - u \frac{\partial v}{\partial y} dx = \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \iint_S u \Delta v dx dy. \end{aligned}$$

$$\text{于是, } \oint_C \left(\frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{u} \frac{\partial v}{v} \right) ds = \oint_C \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = \iint_S v \Delta u dx dy - \iint_S u \Delta v dx dy = \iint_S \left(\frac{\Delta u}{u} - \frac{\Delta v}{v} \right) dx dy.$$

【4335】 利用格林第二公式证明:若 $u = u(x, y)$ 是有界闭区域 S 内的调和函数,则

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

式中 C 为区域 S 的边界, n 为围线 C 的外法向量, (x, y) 为区域 S 的内点, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ 为点 (x, y) 与围线 C 上的动点 (ξ, η) 之间的距离.

提示 从区域 S 中除去点 (x, y) 与该点的无穷小的圆形邻域,并对区域 S 的剩余部分(图 8.67 中的区域 S')应用格林第二公式.

证 先证 $v = \ln r$ 为 $(\xi, \eta) ((\xi, \eta) \neq (x, y))$ 的调和函数.事实上,我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \xi} &= \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}, & \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} &= \frac{(\eta - y)^2 - (\xi - x)^2}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} &= \frac{\eta - y}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}, & \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} &= \frac{(\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^2}. \end{aligned}$$

因此, $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0$, 即 $\Delta v = 0$.

今以点 (x, y) ($(\xi, \eta) \neq (x, y)$ 时)为中心, ρ 为半径画一圆 C_0 , 使此圆包含在围线 C 内, C 及 C_0 的正向如图 8.67 所示. 曲线 C 的法线向外, C_0 的法线指向点 (x, y) . 因此, 在 C 上, 我们有

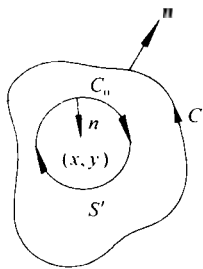


图 8.67

$$\left. \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right|_{r=\rho} = - \left. \frac{\partial \ln r}{\partial r} \right|_{r=\rho} = - \frac{1}{r} \Big|_{r=\rho} = - \frac{1}{\rho}.$$

现将格林第二公式应用到由 C_0 及 C 所围的区域 S' 上去, 即得

$$\iint_{S'} \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta \ln r \\ u & \ln r \end{vmatrix} d\xi d\eta = \oint_{C_0+C} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \ln r}{\partial n} \\ u & \ln r \end{vmatrix} ds,$$

由于 $\Delta \ln r = 0, \Delta u = 0$, 故得

$$\oint_{C_0+C} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \ln r}{\partial n} \\ u & \ln r \end{vmatrix} ds = 0.$$

将行列式展开, 并利用曲线积分的性质, 即得

$$\oint_C \left(\ln r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) ds = - \oint_{C_0} \left(\ln r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) ds.$$

但由于

$$\begin{aligned} \oint_{C_0} \left(\ln r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) ds &= \oint_{C_0} \ln \rho \frac{\partial u}{\partial n} ds - \oint_{C_0} u \left(-\frac{1}{\rho} \right) ds = 0 \cdot \ln \rho + \frac{1}{\rho} \oint_{C_0} u ds \\ &= \frac{1}{\rho} u(\xi', \eta') \oint_{C_0} ds = 2\pi u(\xi', \eta'), \end{aligned}$$

其中 $u(\xi', \eta')$ 为 u 在圆 C_0 上某点的值, 故得

$$u(\xi', \eta') = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

两端令 $\rho \rightarrow +0$ 取极限, 并注意到函数 u 在点 (x, y) 的连续性, 即得

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

*) 利用 4331 题的结果.

* *) 利用第一型曲线积分的中值定理, 其证明方法与普通定积分的中值定理类似.

【4336】 证明对于调和函数 $u(M) = u(x, y)$ 的中值定理:

$$u(M) = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} u(\xi, \eta) ds,$$

式中 C_ρ 是以点 M 为中心 ρ 为半径的圆周.

证 利用 4335 题的结果(取 C 为 C_ρ), 得

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\rho} \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds;$$

但在 C_ρ 上, 有 $r = \rho$,

$$\left. \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right|_{r=\rho} = \left. \frac{\partial \ln r}{\partial r} \right|_{r=\rho} = \frac{1}{r} \Big|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho},$$

由此, 再注意到 $\oint_{C_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ (这是利用 4331 题的结果), 得

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\rho} \left(\frac{u}{\rho} - \ln \rho \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} u ds - \frac{\ln \rho}{2\pi} \oint_{C_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} u(\xi, \eta) ds.$$

证毕.

*) 原题中漏掉了 ρ , 即应将 $\frac{1}{2\pi}$ 改为 $\frac{1}{2\pi\rho}$.

【4337】 证明: 有界闭区域内的非常数调和函数 $u(x, y)$ 在此区域内的点不能达到其最大值或最小值(极大值原理).

证 设有界闭区域为 $\bar{\Omega}$, 它是由有界开区域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 构成. 我们要证明: 如果 $u(x, y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 内的某点 $P_0(x_0, y_0)$ 达到其最大值或最小值(例如, 设达到最大值), 则 $u(x, y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上必为常数. 分三步证明.

(1) 先证: 若圆域 $S_\rho = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \rho^2\}$ 完全属于 Ω , 则 $u(x, y)$ 在 S_ρ 上为常数.

对任何的 $0 < r \leq \rho$, 用 C_r 表圆周 $\{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$. 由 4336 题的结果可知

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{C_r} u(\xi, \eta) ds,$$

故

$$\frac{1}{2\pi r} \oint_{C_r} [u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta)] ds = 0. \quad (1')$$

但因 $u(x_0, y_0)$ 为最大值, 故在 C_r 上恒有

$$u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta) \geq 0.$$

由此, 根据 (1'), 即易知在 C_r 上 $u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta) = 0$. 因为, 若有某点 $(\xi_0, \eta_0) \in C_r$ 使 $u(x_0, y_0) - u(\xi_0, \eta_0) = \tau > 0$, 则由 $u(x, y)$ 的连续性可知, 必有以 (ξ_0, η_0) 为中心的某小圆域 σ 存在, 使当 $(\xi, \eta) \in \sigma$ 时, 恒有 $u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta) \geq \frac{\tau}{2}$. 用 C'_r 表 C_r 含于 σ 内的部分, 则

$$\oint_{C'_r} [u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta)] ds \geq \int_{C'_r} [u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta)] ds \geq \oint_{C'_r} \frac{\tau}{2} ds = \frac{1}{2} \tau l' > 0,$$

其中 l' 表圆弧 C'_r 之长, 此显然与 (1') 式矛盾.

于是, 在 C_r 上有 $u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta) \equiv 0$. 再根据 r 的任意性 ($0 < r \leq \rho$), 即知对任何 $(\xi, \eta) \in S_\rho$, 都有 $u(\xi, \eta) = u(x_0, y_0)$. 换句话说, $u(x, y)$ 在 S_ρ 上是常数.

(2) 次证: 设 $P^*(x^*, y^*)$ 为 Ω 的任一内点 (即 $P^* \in \Omega$), 则必有 $u(x^*, y^*) = u(x_0, y_0)$.

用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 $P_0(x_0, y_0)$ 与点 $P^*(x^*, y^*)$ 连接起来 (图 8.68). 用 δ 表 $\partial\Omega$ 与 l 之间的距离, 即

$$\delta = \min \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

其中 \min 的是对一切 $(x, y) \in \partial\Omega, (x, y) \in l$ 来取的 (由于 $\partial\Omega, l$ 是互不相交的有界闭集, 可证 \min 一定能达到, 从而 $\delta > 0$). 取 $0 < \delta' < \delta$. 以点 P_0 为中心, δ' 为半径作一圆, 得圆域 $S_0 = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta'^2\}$. 此

圆域完全含于 Ω 内, 由 (1) 段已证的结论知, $u(x, y)$ 在 S_0 中为常数. 特别 $u(x_1, y_1) = u(x_0, y_0)$. 这里点 $P_1(x_1, y_1)$ 代表圆周 $C_0 = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \delta'^2\}$ 与 l 折线的交点. 又以点 P_1 为中心, δ' 半径作一圆, 得圆域 $S_1 = \{(x, y) | (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \leq \delta'^2\}$. 由于 $u(x, y)$ 在点 $P_1(x_1, y_1)$ 也达到最大值, 而 S_1 完全含于 Ω 内, 故将 (1) 段结果用于 S_1 可知 $u(x, y)$ 在 S_1 上为常数, 特别 $u(x_2, y_2) = u(x_1, y_1)$, 这里点 $P_2(x_2, y_2)$ 表圆周 $C_1 = \{(x, y) | (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \delta'^2\}$ 与 l 的交点 (除 P_0 外的另一交点). 再以点 P_2 为中心, δ' 为半径作一圆域 S_2, \dots , 这样继续作下去, 显然, 至多经过 n 次 (n 表大于 $\frac{s}{\delta'}$ 的最小正整数, s 表 l 的长), 点 $P^*(x^*, y^*)$ 必属于 S_{n-1} , 从而,

$$u(x^*, y^*) = u(x_{n-1}, y_{n-1}) = \dots = u(x_1, y_1) = u(x_0, y_0).$$

(3) 由 (2) 段的结果可知, $u(x, y)$ 在 Ω 上是常数; 根据 $u(x, y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的连续性, 通过由 Ω 的点趋向 $\partial\Omega$ 的点取极限, 即知 $u(x, y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是常数. 证毕.

注 从证明过程中看出, 需假定区域 Ω (从而 $\bar{\Omega}$) 是连通的. 事实上, 若 Ω 不连通, 则结论不一定成立. 例如, 设 $\bar{\Omega} = S_1 + S_2$, 其中 S_1 与 S_2 是两个互无公共点的闭圆域, 而令

$$u(x, y) = \begin{cases} c_1, & (x, y) \in S_1, \\ c_2, & (x, y) \in S_2, \end{cases}$$

其中 $c_1 \neq c_2$ 是两个常数, 则 $u(x, y)$ 显然是 $\bar{\Omega}$ 上的调和函数且在 $\bar{\Omega}$ 上不是常数, 但它却在其内点达到最大值与最小值.

【4338】 证明黎曼公式: $\iint_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$

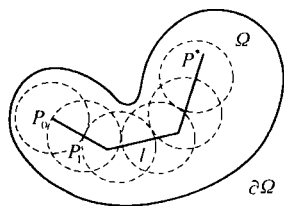


图 8.68

$$\text{式中} \quad L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu, \quad M[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial v}{\partial x} - b \frac{\partial v}{\partial y} + cv,$$

(a, b, c 为常数), P 和 Q 为某些确定的函数, 围线 C 是有界区域 S 的边界.

证 因为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} &= vL[u] - uM[v] = v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + av \frac{\partial u}{\partial x} + bv \frac{\partial u}{\partial y} + cuv - u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - au \frac{\partial v}{\partial x} - bu \frac{\partial v}{\partial y} - cuv \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + a \frac{\partial}{\partial x} (vu) + b \frac{\partial}{\partial y} (uv) = \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + auv \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - buv \right), \end{aligned}$$

故利用格林公式, 即得

$$\iint_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$$

$$\text{其中} \quad P = u \frac{\partial v}{\partial x} - buv, \quad Q = v \frac{\partial u}{\partial y} + auv.$$

【4339】 设 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 为定常流的速度分量, C 为区域 S 的边界, 求区域 S 内流体质量的变化率. 若流体是不可压缩的, 且在区域 S 内没有源和汇, 则函数 u 和 v 满足怎样的方程?

解 设流体的速度为 w , 则 $w = ui + vj$, 又 $ds = dx i + dy j$. 于是, 流量为

$$Q = \oint_C w \cdot n ds = \oint_C [u \cos(n, x) + v \sin(n, x)] ds = \oint_C u dy - v dx = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy,$$

其中 n 表示曲线 C 的外法线上的单位矢量, 并且此处已假定流体的面密度等于 1. 若流体是不可压缩的, 且在区域 S 内没有源和汇, 则流体的流出量与流入量的差 Q 应等于零, 即

$$\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

又显然, 对于任意的围线 C , 上述结果均正确. 于是, 连续函数 u, v 应满足方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

*) 参看 4323 题的题解.

【4340】 根据毕奥-萨瓦尔定律, 通过导线元 ds 的电流 i 在空间的点 $M(x, y, z)$ 处所对应的磁场强度为

$$dH = ki \frac{(r \times ds)}{r^3},$$

其中 r 为连接导线元 ds 与点 M 的向量, k 为比例系数. 对于封闭导线 C 的情形, 求点 M 的磁场强度 H 的投影 H_x, H_y, H_z .

解 由题意知: 若设导线 C 上的动点为 (ξ, η, ζ) , 则

$$r = (\xi - x)i + (\eta - y)j + (\zeta - z)k.$$

又 $ds = d\xi i + d\eta j + d\zeta k$. 于是, 磁场强度为

$$\begin{aligned} H &= ki \oint_C \frac{1}{r^3} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ d\xi & d\eta & d\zeta \end{vmatrix} = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\eta - y)d\zeta - (\zeta - z)d\eta]i + ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\zeta - z)d\xi \\ &\quad - (\xi - x)d\zeta]k + ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\xi - x)d\eta - (\eta - y)d\xi]j, \end{aligned}$$

从而投影

$$H_x = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\eta - y)d\zeta - (\zeta - z)d\eta], \quad H_y = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\zeta - z)d\xi - (\xi - x)d\zeta],$$

$$H_z = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\xi - x)d\eta - (\eta - y)d\xi].$$

§ 14. 曲面积分

1° 第一型曲面积分 若 S 为分片光滑的双侧曲面

$$x=x(u,v), \quad y=y(u,v), \quad z=z(u,v) \quad ((u,v) \in \Omega) \quad (1)$$

而 $f(x,y,z)$ 为在曲面 S 的各点上有定义并且连续的函数, 则

$$\iint_S f(x,y,z) dS = \iint_{\Omega} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{EG-F^2} du dv, \quad (2)$$

式中

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

在特别情形下, 若曲面的方程具有以下形式:

$$z=z(x,y) \quad ((x,y) \in \sigma),$$

其中 $z(x,y)$ 为单值连续可微函数, 则

$$\iint_S f(x,y,z) dS = \iint_{\sigma} f[x,y,z(x,y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

此积分与曲面 S 的正反面的选择无关.

若把函数 $f(x,y,z)$ 当作曲面 S 在点 (x,y,z) 的面密度, 则积分(2)是此曲面的质量.

2° 第二型曲面积分 若 S 为光滑的双侧曲面; S^+ 为它的正面, 即由法向量 $\mathbf{n} \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$ 确定的

一面, $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ 为在曲面 S 上有定义而且连续的三个函数, 则

$$\iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{S^+} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \quad (3)$$

若曲面 S 以参数方程(1)的形式给出, 则法向量 \mathbf{n} 的方向余弦由下列公式来确定:

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

其中

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

且根式前的符号用适当的方法来选择.

当变换为曲面 S 的另一面 S^- 时, 积分(3)的符号相反.

【4341】 两个积分 $I_1 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$ 和 $I_2 = \iint_P (x^2 + y^2 + z^2) dP,$

(式中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, P 为其内接八面体的表面 $|x| + |y| + |z| = a$) 相差若何?

解 若令

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y = a \sin \varphi \sin \theta, \quad z = a \cos \varphi,$$

则有

$$I_1 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} a^2 \cdot a^2 \sin \varphi d\theta = 4\pi a^4.$$

为求 I_2 , 只要注意到 $|z| = a - (|x| + |y|)$, 并利用对称性, 即得

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_P (x^2 + y^2 + z^2) dP = 8 \int_0^a dx \int_0^{a-x} \sqrt{3} [x^2 + y^2 + (a-x-y)^2] dy \\ &= 16\sqrt{3} \int_0^a dx \int_0^{a-x} \left[x^2 + y^2 + xy + \frac{a^2}{2} - a(x+y) \right] dy \\ &= 16\sqrt{3} \int_0^a \left[x^2(a-x) - \frac{1}{6}(a-x)^3 - ax(a-x) + \frac{a^2}{2}(a-x) \right] dx \\ &= 16\sqrt{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) a^4 = 2\sqrt{3} a^4. \end{aligned}$$

于是,两积分之差为

$$I_1 - I_2 = 2(2\pi - \sqrt{3})a^3.$$

【4342】 计算

$$\iint_S z \, dS,$$

式中 S 为曲面 $x^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$) 被曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所割下的部分.

解 作变换

$$x = a \sin \theta, \quad y = y, \quad z = a + a \cos \theta,$$

则两曲面分别化为

$$r = 1, \quad \text{和} \quad y^2 = 2a^2 \cos \theta (1 + \cos \theta).$$

两曲面交线的参数方程为

$$x = a \sin \theta, \quad y = \pm \sqrt{2}a \sqrt{\cos \theta (1 + \cos \theta)}, \quad z = a + a \cos \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

于是,

$$\begin{aligned} \iint_S z \, dS &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}{\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1-\cos\theta)}}}^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}} (a + a \cos \theta) a \, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2}a^3 \sqrt{\cos \theta} \sqrt{(1 + \cos \theta)^3} \, d\theta \\ &= -4\sqrt{2}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos \theta} \sqrt{(1 + \cos \theta)^3}}{\sin \theta} d(\cos \theta) = -4\sqrt{2}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos \theta} (1 + \cos \theta)}{\sqrt{(1 - \cos \theta)}} d(\cos \theta) \\ &= 4\sqrt{2}a^3 \int_0^1 \left[t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} \right] dt = 4\sqrt{2}a^3 \left[B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] = \frac{7}{2}\sqrt{2}\pi a^3. \end{aligned}$$

计算下列第一型曲面积分:

【4343】 $\iint_S (x+y+z) \, dS$, 式中 S 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$.

解 由于

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

故有

$$\begin{aligned} \iint_S (x+y+z) \, dS &= \int_a^0 dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}) \, dy \\ &= \int_a^0 (\pi a x + 2a \sqrt{a^2-x^2}) \, dx = 4a \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} \, dx = 4a \frac{\pi a^2}{4} = \pi a^3. \end{aligned}$$

【4344】 $\iint_S (x^2 + y^2) \, dS$, 式中 S 为区域 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ 的边界.

解 面积 S 由两部分组成. 一部分为 $S_1: z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 它在 Oxy 平面上的投影为 $x^2 + y^2 = 1$; 另一部分为 $S_2: z = 1$, 它在 Oxy 平面上的投影也是 $x^2 + y^2 = 1$. 对于这两部分分别有

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = 1.$$

若利用极坐标, 则有

$$\iint_S (x^2 + y^2) \, dS = \iint_{S_1} (x^2 + y^2) \, dS + \iint_{S_2} (x^2 + y^2) \, dS = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 \, dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2}).$$

【4345】 $\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, 式中 S 为四面体 $x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的边界.

提示 注意曲面 S 由四部分组成, 分别为

$$S_1: x+y+z=1, x>0, y>0, z>0; \quad S_2: x=0; \quad S_3: y=0; \quad S_4: z=0.$$

解 曲面 S 由四部分组成, 分别为 $S_1: x+y+z=1, x>0, y>0, z>0; S_2: x=0; S_3: y=0; S_4: z=0$. 于是, 我们有

$$\begin{aligned}
& \iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2} \\
&= \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} + \int_0^1 dy \int_0^x \frac{dz}{(1+y)^2} + \int_0^1 dx \int_0^x \frac{dz}{(1+x^2)} + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} \\
&= (\sqrt{3}+1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} + 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dz}{(1+x)^2} \\
&= (\sqrt{3}+1) \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) + 2(1 - \ln 2) = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}-1)\ln 2.
\end{aligned}$$

【4346】 $\iint_S |xyz| dS$, 式中 S 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所截下的部分.

解 由于 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}$,

若利用极坐标,并注意到对称性,即得

$$\begin{aligned}
\iint_S |xyz| dS &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^4 \cos\varphi \sin\varphi \sqrt{1+4r^2} r dr = 2 \int_0^1 r^5 \sqrt{1+4r^2} dr = \int_0^1 t^2 \sqrt{1+4t} dt \\
&= \int_1^{\sqrt{5}} \frac{1}{32} (y^2-1)^2 y^2 dy = \frac{1}{32} \left(\frac{y^7}{7} - \frac{2y^5}{5} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}.
\end{aligned}$$

*) 作代换 $r^2=t$,

* *) 作代换 $\sqrt{1+4t}=y$.

【4347】 $\iint_S \frac{dS}{\rho}$, 式中 S 为椭球面, ρ 为椭球中心到与椭球面微元 dS 相切的平面的距离.

解 设椭球面方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,

则曲面上任一点 (x, y, z) 的法矢向量为 $\left\{ \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right\}$. 从而, 由题设知: $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})$, 其中 \mathbf{n}, \mathbf{r} 分

别表示点 (x, y, z) 处的法向量和径向量, 即 $\rho = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$,

而法线与 Oz 轴夹角的余弦为 $\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$.

$$\begin{aligned}
\text{于是, } \iint_S \frac{dS}{\rho} &= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)}{|z|} dx dy = 2 \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{c \left[\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right) + \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}} dx dy \\
&= 2 \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \frac{c}{\sqrt{1-r^2}} \left(\frac{r^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{r^2}{c^2} \right) ab r d\theta \\
&= 2\pi abc \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \sqrt{1-r^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + 2 \frac{\sqrt{1-r^2}}{c^2} \right] r dr \\
&= -\pi abc \left[2 \sqrt{1-r^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{2}{3} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{4}{3c^2} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^1 \\
&= \frac{4\pi}{3} abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).
\end{aligned}$$

*) 作广义极坐标变换 $x = a r \cos \theta, y = b r \sin \theta$.

* *) 利用关系式: $\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \sqrt{1-r^2}$.

【4348】 $\iint_S z \, dS$, 式中 S 为螺旋面的一部分: $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$ ($0 < u < a; 0 < v < 2\pi$).

解 由于

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 1 = 1 + u^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = -u \sin v \cos v + u \cos v \sin v = 0,$$

故得 $\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{1+u^2}$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_S z \, dS &= \int_0^a du \int_0^{2\pi} v \sqrt{1+u^2} \, dv = 2\pi^2 \int_0^a \sqrt{1+u^2} \, du = 2\pi^2 \left[\frac{u}{2} \sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1+u^2}) \right] \Big|_0^a \\ &= \pi^2 [a \sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2})] \end{aligned}$$

【4349】 $\iint_S z^2 \, dS$, 式中 S 为圆锥面的一部分: $x = r \cos \varphi \sin \alpha, y = r \sin \varphi \sin \alpha, z = r \cos \alpha$ ($0 \leq r \leq a; 0 \leq \varphi \leq$

2π) 和 α 为常数 ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

解 由于

$$E = \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha + \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$G = r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha = r^2 \sin^2 \alpha,$$

$$F = (\cos \varphi \sin \alpha)(-\sin \varphi \sin \alpha) + \sin \varphi \sin \alpha (\cos \varphi \sin \alpha) = 0,$$

故得 $\sqrt{EG-F^2} = r \sin \alpha$. 于是, $\iint_S z^2 \, dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \cos^2 \alpha \cdot r \sin \alpha \, dr = \frac{\pi a^4}{2} \sin \alpha \cos^2 \alpha$.

【4350】 $\iint_S (xy + yz + zx) \, dS$, 式中 S 为圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被曲面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所割下的部分.

解 由于

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}.$$

又曲面 S 在平面 Oxy 上的投影域为 $x^2 + y^2 \leq 2ax$. 于是, 利用极坐标, 即得

$$\begin{aligned} \iint_S (xy + yz + zx) \, dS &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} [r^2 \cos \varphi \sin \varphi + r^2 (\cos \varphi + \sin \varphi)] r \, dr \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (2a \cos \varphi)^4 \cos \varphi \, d\varphi = 8\sqrt{2} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi \, d\varphi = \frac{64}{15} \sqrt{2} a^4. \end{aligned}$$

【4351】 证明泊松公式:

$$\iint_S f(ax + by + cz) \, dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(u \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) \, du,$$

式中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

证 取新坐标系 $Ouvw$, 其中原点不变, 平面 $ax + by + cz = 0$ 即为 Ovw 面, u 轴垂直于该面, 则有

$$u = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

在新坐标系下, 公式左端的积分可写为 $\iint_S f(u \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) \, dS$.

显然, 球面 S 的方程为 $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ 或 $v^2 + w^2 = (1 - u^2)^2$.

若表示成参数式, 则为

$$u = u, \quad v = \sqrt{1 - u^2} \cos w, \quad w = \sqrt{1 - u^2} \sin w,$$

其中 $-1 \leq u \leq 1, 0 \leq w \leq 2\pi$. 从而, $dS = \sqrt{EG-F^2} \, du \, dw = \sqrt{\frac{1}{1-u^2} (1-u)^2 - 0} \, du \, dw = du \, dw$.

于是,最后得

$$\begin{aligned} \iint_S f(ax+by+cz) dS &= \iint_S f(u \sqrt{a^2+b^2+c^2}) dS = \int_0^{2\pi} dw \int_{-1}^1 f(u \sqrt{a^2+b^2+c^2}) du \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 f(u \sqrt{a^2+b^2+c^2}) du. \end{aligned}$$

【4352】 求抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ ($0 \leq z \leq 1$) 的质量, 此壳的面密度按规律 $\rho = z$ 而变.

解 质量为

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \rho dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 2} z \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy = \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 2} (x^2+y^2) \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1+r^2} dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1+r^2} dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{1+r^2} d(r^2) \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{5} (1+r^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}} - \frac{2}{3} (1+r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}. \end{aligned}$$

【4353】 求密度为 ρ_0 的均质球面壳 $x^2+y^2+z^2=a^2$ ($z \geq 0$) 对于 Oz 轴的转动惯量.

解 转动惯量为

$$\begin{aligned} I_z &= \iint_S (x^2+y^2) \rho_0 dS = \rho_0 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (x^2+y^2) \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx dy = a\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}} dr \\ &= 2\pi a^4 \rho_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi a^4 \rho_0. \end{aligned}$$

【4354】 求密度为 ρ_0 的均质锥面壳

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \leq z \leq b)$$

对直线

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$$

的转动惯量.

解 设 (x, y, z) 为均质锥面壳上任一点, 它到直线

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$$

的距离为

$$|d| = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} y-0 & z-b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z-b & x-0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-0 & y-0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}}} = \sqrt{\left(\frac{b}{a} \sqrt{x^2+y^2} - b\right)^2 + y^2}.$$

又因

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

于是, 所求的转动惯量为

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \left[\left(\frac{b}{a} \sqrt{x^2+y^2} - b\right)^2 + y^2 \right] \rho_0 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} dx dy = \frac{\sqrt{a^2+b^2} \rho_0}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left[\left(\frac{b}{a} r - b\right)^2 + r^2 \sin^2 \varphi \right] r dr \\ &= \frac{\sqrt{a^2+b^2} \rho_0}{a} \left[2\pi a^2 b^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi a^4}{4} \right] = \frac{\pi a \rho_0 (3a^2 + 2b^2) \sqrt{a^2+b^2}}{12}. \end{aligned}$$

【4355】 求均质曲面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=ax$ 所割下部分的质心坐标.

解 质量为 $M = \iint_S \rho_0 dS = \sqrt{2} \rho_0 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} dx dy = \sqrt{2} \rho_0 \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi = \frac{\sqrt{2} \pi a^2 \rho_0}{4}.$

从而, 质心坐标为

$$x_0 = \frac{1}{M} \cdot \sqrt{2} \rho_0 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} x dx dy = \frac{4}{\pi a^2} \int_0^a x dx \int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax}} dy = \frac{8}{\pi a^2} \int_0^a x \sqrt{ax-x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{\pi a^2} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} + t \right) \sqrt{\left(\frac{a}{2} \right)^2 - t^2} dt = \frac{8}{\pi a^2} \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\left(\frac{a}{2} \right)^2 - t^2} dt = \frac{a}{2}, \\
y_1 &= \frac{1}{M} \cdot \sqrt{2} \rho_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax+x^2}} y dy = 0, \\
z_1 &= \frac{1}{M} \cdot \sqrt{2} \rho_0 \iint_{r^2 \leq \frac{a^2}{2}} z dr dy = \frac{4}{\pi a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^2 dr = \frac{8a}{3\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{16a}{9\pi}.
\end{aligned}$$

即质心为 $(\frac{a}{2}, 0, \frac{16a}{9\pi})$.

*) 作变换 $t = x - \frac{a}{2}$.

【4356】 求均质曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ($x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq a$) 的质心坐标.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$

所以, $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$

由对称性知, 质心的横坐标与纵坐标相等, 即

$$x_0 = y_0 = \frac{\iint_S x dS}{\iint_S dS} = \frac{\int_0^a \int_0^{a-y} \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy}{\int_0^a \int_0^{a-x} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy}.$$

$$\begin{aligned}
\text{由于, } \int_0^a \int_0^{a-y} \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy &= a \int_0^a \left(-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=a-y} dy \\
&= a \left[\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy - \int_0^a \sqrt{2ay - 2y^2} dy \right] - a \left(\frac{\pi a^2}{4} - \sqrt{2} \cdot \frac{\pi \left(\frac{a}{2} \right)^2}{2} \right) = \frac{\pi a^3}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\
\int_0^a \int_0^x \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy &= a \int_0^a \arcsin \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx = -4a^2 \int_1^0 \frac{u}{(1+u^2)} \arcsin u du \\
&= 2a^2 \left(\arcsin u \Big|_1^0 - \int_1^0 \frac{du}{(1+u^2)\sqrt{1-u^2}} \right) = 2a^2 \left[-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}} \Big|_0^1 \right] = \pi a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right), \\
\text{故有 } x_0 = y_0 &= \frac{\frac{\pi a^3}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{\pi a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{a}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

$$\text{又由于 } \iint_S z dS = \int_0^a \int_0^{a-x} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = a \int_0^a (a-x) dx = \frac{a^3}{2},$$

$$\text{故有 } z_0 = \frac{\iint_S z dS}{\iint_S dS} = \frac{\frac{a^3}{2}}{\pi a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{a}{\pi} (\sqrt{2} + 1),$$

即质心为 $\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{\pi} (\sqrt{2} + 1) \right)$.

*) 由定积分的几何意义知:

$$\int_0^a \sqrt{y(a-y)} dy = \int_0^a \sqrt{\left(\frac{a}{2} \right)^2 - \left(y - \frac{a}{2} \right)^2} dy = \frac{\pi a^2}{8}.$$

**) 利用 1957 题的结果.

【4357】 密度为 ρ_0 的均质截圆锥面

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < b \leq r \leq a).$$

以怎样的力吸引质量为 m 位于该圆锥面顶点的质点?

解 显然截圆锥面顶点为原点 $O(0,0,0)$. 对应于半径 r 处取斜高为 ds 的锥面带, 其面积为

$$dS = 2\pi r ds = 2\sqrt{2}\pi r dr.$$

它与顶点 O 处质量为 m 的质点的引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射投影显见为零, 而在 Oz 轴上的投影为

$$dZ = \frac{km \cdot 2\sqrt{2}\pi r dr \rho_0}{r^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{k\pi m \rho_0 dr}{r}.$$

于是, 截圆锥面吸引质量为 m 的质点(在顶点处)的引力在坐标轴上的投影为

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z = \int_b^a \frac{k\pi m \rho_0 dr}{r} = k\pi m \rho_0 \ln \frac{a}{b}.$$

【4358】 求密度为 ρ_0 的均质球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的势, 即计算积分

$$u = \iint_S \frac{\rho_0 dS}{r},$$

式中

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

解 记 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. 由对称性, 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的势等于在点 $N_0(0, 0, r_0)$ 的势. 由余弦定理知, 球面上任一点 (x, y, z) 到点 N_0 的距离为

$$r = \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2r_0 a \cos \psi} \quad (0 \leq \psi \leq \pi),$$

而球面带 $dS = 2\pi a^2 \sin \psi d\psi$. 于是, 所求的势为

$$u = \iint_S \frac{\rho_0 dS}{r} = 2\pi a^2 \rho_0 \int_0^\pi \frac{\sin \psi d\psi}{\sqrt{a^2 + r_0^2 - 2r_0 a \cos \psi}}.$$

令 $u^2 = a^2 + r_0^2 - 2r_0 a \cos \psi$, 则 $2u du = 2r_0 a \sin \psi d\psi$, 即

$$\sin \psi d\psi = \frac{u}{r_0 a} du.$$

从而, 所求的势为

$$u = \frac{2\pi a \rho_0}{r_0} \int_{a-r_0}^{a+r_0} du = \begin{cases} 4\pi a \rho_0, & r_0 < a, \\ \frac{4\pi a^2 \rho_0}{r_0}, & r_0 > a, \\ 4\pi a \rho_0, & r_0 = a \end{cases}$$

也即

$$u = 4\pi \rho_0 \min\left(a, \frac{a^2}{r_0}\right).$$

上述结果表明: 若 M_0 点在球面内, 则势是个常量; 若 M_0 在球面外, 则在该点球面的势等于将球面质量集中于球心的势; 当 M_0 点从球面内通过球面时具有连续性, 从而, 当 M_0 点在球面上时, 势也是个常量, 且等于球内任一点的势.

【4359】 计算

$$F(t) = \iiint_{x+y+z=t} f(x, y, z) dS,$$

式中

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \\ 0, & x^2 + y^2 + z^2 > 1. \end{cases}$$

作出函数 $u = F(t)$ 的图像.

解 显然, 平面 $x+y+z = \pm\sqrt{3}$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的两个切平面, 于是,

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & |t| \leq \sqrt{3}, \\ 0, & |t| > \sqrt{3}. \end{cases}$$

由方程组 $\begin{cases} x+y+z=t, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ 得椭圆方程

$$x^2 + y^2 + [t - (x+y)]^2 = 1,$$

或
$$x^2 + y^2 + xy - t(x+y) = \frac{1-t^2}{2}, \quad (1)$$

记该椭圆围成的区域为 Ω , 则

$$F(t) = \iint_{\Omega} \{1 - x^2 - y^2 - [t - (x+y)]^2\} \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \iint_{\Omega} [1 - t^2 - 2(x^2 + y^2) - 2xy + 2t(x+y)] dx dy.$$

作平移变换
$$x = x' + \frac{t}{3}, \quad y = y' + \frac{t}{3},$$

则方程(1)变为
$$x'^2 + y'^2 + x'y' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t^2}{3}\right), \quad (2)$$

记相应的区域为 Ω' , 而函数为
$$f = 1 - \frac{t^2}{3} - 2(x'^2 + y'^2) - 2x'y'.$$

于是,
$$F(t) = \sqrt{3} \iint_{\Omega'} \left[1 - \frac{t^2}{3} - 2(x'^2 + y'^2) - 2x'y'\right] dx' dy'$$

再作旋转变换
$$x' = \frac{x'' - y''}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{x'' + y''}{2},$$

则方程(2)变为椭圆的标准方程

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right)^2} = 1. \quad (3)$$

记相应的区域为 Ω'' , 而函数为 $f = 1 - \frac{t^2}{3} - (3x''^2 + y''^2)$. 于是,

$$F(t) = \sqrt{3} \iint_{\Omega''} \left[1 - \frac{t^2}{3} - (3x''^2 + y''^2)\right] dx'' dy''.$$

最后, 作广义极坐标变换, 即
$$x'' = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{t^2}{3}} r \cos \varphi, \quad y'' = \sqrt{1-\frac{t^2}{3}} r \sin \varphi,$$

则有
$$F(t) = \left(1 - \frac{t^2}{3}\right) \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - \frac{t^2}{3}\right) (r - r^3) dr d\varphi = \left(1 - \frac{t^2}{3}\right)^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\varphi = \frac{\pi}{18} (3 - t^2)^2,$$

其中 $|t| \leq \sqrt{3}$, 而当 $|t| > \sqrt{3}$, 则有
$$F(t) = 0.$$

考虑函数 $u = F(t)$ ($-\infty < t < +\infty$). 我们有

$$\frac{du}{dt} = -\frac{2\pi}{9} (3 - t^2) t \quad (|t| < \sqrt{3}).$$

当 $t = \sqrt{3}$ 时, u 的左导数 $= -\frac{2\pi}{9} (3 - t^2) \Big|_{t=\sqrt{3}} = 0$, u 的右导数显然为零 (因为 $t \geq \sqrt{3}$ 时, $u \equiv 0$), 故 $t = \sqrt{3}$ 时 u

的导数存在且等于零. 同理可证, $t = -\sqrt{3}$ 时, u 的导数也存在且等于零. 于是, 曲线 $u = F(t)$ 在 $t = 0$ 处以及

$|t| \geq \sqrt{3}$ 的各 t 处切线都平行于 Ot 轴. 又 $t = 0$ 处达极大值 $u = \frac{\pi}{2}$, 且为最大值. 由于

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{2\pi}{3} (1 - t^2),$$

所以, 当 $t = \pm 1$ 时为拐点. 显然, 图像关于 Ou 轴是对称的. 函数 $u = F(t)$ 的图像如图 8.69 所示.

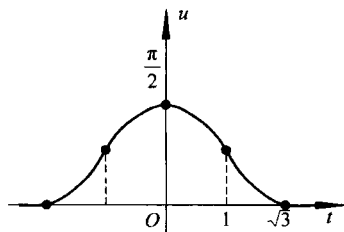


图 8.69

【4360】 计算积分

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z) dS,$$

式中

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0, & z < \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

解 由球面方程 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{|t|}{\sqrt{t^2 - (x^2 + y^2)}},$$

而由

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = t^2, \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

可得

$$x^2 + y^2 = \frac{t^2}{2} = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

于是, 积分

$$\begin{aligned} F(t) &= \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z) dS = \iint_{x^2+y^2 \leq \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} (x^2 + y^2) \frac{|t|}{\sqrt{t^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy \\ &= |t| \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \frac{r^3}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr d\varphi. \end{aligned}$$

因为

$$\int \frac{r^3}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = \frac{1}{2} \int \frac{t^2 - r^2 - t^2}{\sqrt{t^2 - r^2}} d(t^2 - r^2) = \frac{1}{3} (t^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - t^2 \sqrt{t^2 - r^2} + C,$$

所以,

$$\int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \frac{r^3}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = \left[\frac{1}{3} (t^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - t^2 \sqrt{t^2 - r^2} \right] \bigg|_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} = \frac{-5\sqrt{2}}{12} |t|^3 + \frac{2}{3} |t|^3 = \frac{8-5\sqrt{2}}{12} |t|^3.$$

于是, 最后得 $F(t) = |t| \int_0^{2\pi} \frac{8-5\sqrt{2}}{12} |t|^3 d\varphi = \frac{(8-5\sqrt{2})\pi}{6} t^4.$

【4361】 计算积分

$$F(x, y, z, t) = \iint_S f(\xi, \eta, \zeta) dS,$$

其中 S 是变球面 $(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2 = t^2$,

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} 1, & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < a^2, \\ 0, & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq a^2, \end{cases}$$

且假设 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > a > 0$.

解 记 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. 旋转坐标轴, 使点 $P(x, y, z)$ 位于 Oz 轴的正方向上的点 $P_0(0, 0, r)$, 如图 8.70 所示.

显然, 当 $0 < t \leq r-a$ 及 $t \geq r+a$ 时, 整个球面上的点满足 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq a^2$, 此时 $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$. 从而, 积分

$$f(x, y, z, t) = \iint_S f(\xi, \eta, \zeta) dS = 0.$$

当 $r-a < t < r+a$ 时, 则 $F(x, y, z, t) = \iint_{S'} dS'$, 其中 S' 为 S 位于 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2$ 内的部分. 从而, 我们有

$$F(x, y, z, t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a t^2 \sin\theta d\theta = 2\pi t^2 (1 - \cos\alpha) = 2\pi t^2 \left(1 - \frac{t^2 + r^2 - a^2}{2rt}\right) = \frac{\pi t}{r} [a^2 - (r-t)^2].$$

计算下列第二型曲面积分:

【4362】 $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 式中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

提示 根据轮换对称知, 只要计算 $\iint_S z dx dy$. 注意到上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 应取上侧, 下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 应取下侧.

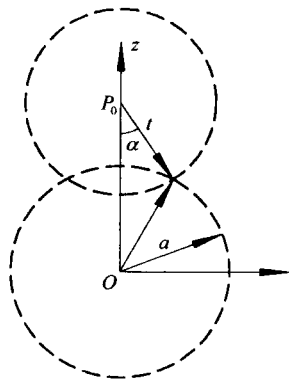


图 8.70

解 根据轮换对称知, 只要计算 $\iint_S z dx dy$. 注意到上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 应取上侧, 下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 应取下侧, 则有

$$\begin{aligned}\iint_S z dx dy &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy - \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) dx dy \\ &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{4}{3} \pi a^3.\end{aligned}$$

于是, 积分 $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = 4\pi a^3$.

【4363】 $\iint_S f(x) dy dz + g(y) dz dx + h(z) dx dy$, 式中 $f(x), g(y), h(z)$ 为连续函数, S 为平行六面体 $0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; 0 \leq z \leq c$ 的外表面.

解 只要计算任何一个积分, 其他两个可类似地写出结果. 例如, 下面计算 $\iint_S h(z) dx dy$. 由于六面体有四个面垂直于 Oxy 平面, 故曲面积分应为零. 从而,

$$\iint_S h(z) dx dy = \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b}} h(c) dx dy - \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b}} h(0) dx dy = abc \frac{h(c) - h(0)}{c}.$$

类似地, 可得到 $\iint_S f(x) dx dz$ 及 $\iint_S g(y) dx dz$ 的值. 于是, 所求的积分为

$$\iint_S f(x) dy dz + g(y) dz dx + h(z) dx dy = abc \left[\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c} \right].$$

【4364】 $\iint_S (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy$, 式中 S 为圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的外侧.

解 解法 1:

记 S_1, S_2 分别为锥面的底面和侧面, 而 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为锥面外法线的方向余弦. 一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy &= \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} (x-y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r^2 (\cos \varphi - \sin \varphi) dr \\ &= \frac{h^3}{3} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi = 0.\end{aligned}$$

另一方面, 在侧面 S_2 上, 对于任一点 (x, y, z) , 有

$$\frac{\cos \alpha}{x} = \frac{\cos \beta}{y} = \frac{\cos \gamma}{-z}$$

从而, dS 在各坐标面上的投影分别为

$$\cos \gamma dS = -d\sigma_{xy}, \quad \cos \alpha dS = -\frac{x}{z} \cos \gamma dS = \frac{x}{z} d\sigma_{xy}, \quad \cos \beta dS = -\frac{y}{z} \cos \gamma dS = \frac{y}{z} d\sigma_{xy}.$$

于是,

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy &= \iint_{S_2} [(y-z) \cos \alpha + (z-x) \cos \beta + (x-y) \cos \gamma] dS \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} \left[\frac{x}{z} (y-z) + \frac{y}{z} (z-x) - (x-y) \right] d\sigma_{xy} = -2 \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} (x-y) dx dy = 0.\end{aligned}$$

综上所述, 我们得 $\iint_S (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = 0$.

解法 2:

记曲面 S 在各坐标面的投影域分别为 S_{xy}, S_{yz} 和 S_{zx} . 于是,

$$\begin{aligned}
& \iint_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy = \iint_S (y-z)dydz + \iint_S (z-x)dzdx + \iint_S (x-y)dxdy \\
& = \left[\iint_{S_{yz}} (y-z)dydz - \iint_{S_{yz}} (y-z)dydz \right] + \left[\iint_{S_{zx}} (z-x)dzdx - \iint_{S_{zx}} (z-x)dzdx \right] \\
& \quad + \left[\iint_{S_{xy}} (x-y)dxdy - \iint_{S_{xy}} (x-y)dxdy \right] \\
& = 0 + 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

【4365】 $\iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{zdx}{y} + \frac{xdy}{z}$, 式中 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧.

提示 根据轮换对称知, 只要计算 $\iint_S \frac{xdy}{z}$, 与 4362 题类似, 注意曲面的侧, 并利用广义极坐标 $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$.

解 根据轮换对称知, 只要计算一个积分. 例如, 计算 $\iint_S \frac{xdy}{z}$. 利用广义极坐标, 即得

$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{xdy}{z} &= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dxdy - \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{-1}{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dxdy \\
&= \frac{2}{c} \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dxdy = \frac{2ab}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = \frac{4\pi ab}{c} [-\sqrt{1-r^2}] \Big|_0^1 = 4\pi \frac{ab}{c}.
\end{aligned}$$

于是, 我们有 $\iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{zdx}{y} + \frac{xdy}{z} = 4\pi \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) = \frac{4\pi}{abc} (b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)$.

【4366】 $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, 式中 S 为球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ 的外侧.

解 根据轮换对称知, 只要计算 $\iint_S z^2 dxdy$. 注意到 $z-c = \pm \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}$, 并利用极坐标, 即得

$$\begin{aligned}
& \iint_S z^2 dxdy \\
&= \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} [c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}]^2 dxdy - \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} [c - \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}]^2 dxdy \\
&= 4c \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} dxdy = 4c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr \\
&= 8\pi c \left[-\frac{1}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^R = \frac{8}{3} \pi R^3 c.
\end{aligned}$$

于是, 我们有 $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = \frac{8}{3} \pi R^3 (a+b+c)$.

§ 15. 斯托克斯公式

若 $P=P(x,y,z), Q=Q(x,y,z), R=R(x,y,z)$ 为连续可微函数, S 为分片光滑的有界双侧曲面, 其边界 C 为分段光滑的简单封闭围线, 则成立斯托克斯公式:

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

式中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的法线的方向余弦, 并且从此法线所指方向来看, 积分时围线 C 的环绕方向

是逆时针的(对于右手坐标系).

【4367】 应用斯托克斯公式, 计算曲线积分

$$\oint_C y dx + z dy + x dz,$$

式中 C 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, 并且从 Ox 轴的正向来看, 积分时此圆周的环绕方向是逆时针的. 用直接计算法检验结果.

解 平面 $x + y + z = 0$ 的法线的方向余弦为 $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

于是,

$$\begin{aligned}\oint_C y dx + z dy + x dz &= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} dS = - \iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) dS \\ &= -\pi a^2 (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = -\sqrt{3} \pi a^2.\end{aligned}$$

下面用直接计算法检验结果. 由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0$$

消去 z , 即得曲线 C 在平面 Oxy 上的投影 $x^2 + y^2 + xy = \frac{a^2}{2}$. 作旋转变换 $x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$, 则方程化为 $3x'^2 + y'^2 = a^2$. 因而, 曲线 C 的参数方程可取为

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} - \sin t \right), \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t \right), \quad z = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \cos t \right) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

于是, 所求的曲线积分为

$$\begin{aligned}\oint_C y dx + z dy + x dz &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left[- \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t \right) \left(\frac{\sin t}{\sqrt{3}} + \cos t \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t \left(\frac{-\sin t}{\sqrt{3}} + \cos t \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} - \sin t \right) \right] dt \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) dt = \frac{a^2}{2} (-\sqrt{3}) 2\pi = -\sqrt{3} \pi a^2.\end{aligned}$$

可见, 两种计算法结果一样.

【4368】 计算积分 $\int_{AmB} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz,$

此积分是从点 $A(a, 0, 0)$ 至点 $B(a, 0, h)$ 沿着螺旋线 $x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = \frac{h}{2\pi} \varphi$ 进行的.

提示 将直线段 AB 与曲线 AmB 组成封闭围线, 并依正方向进行, 应用斯托克斯公式即易获解.

解 连接 A, B 两点得线段 AB , 它与 AmB 组成封闭围线并依正向进行, 则由斯托克斯公式知:

$$\oint_{AmBA} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz = \iint_S 0 dy dz + 0 dz dx + 0 dx dy = 0.$$

于是,

$$\begin{aligned}\int_{AmB} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz \\ = \int_{AB} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz = \int_0^h z^2 dz = \frac{h^3}{3}.\end{aligned}$$

*) 在线段 AB 上, $x = a, y = 0, dx = dy = 0$, 而 $0 \leq z \leq h$.

【4369】 设 C 为平面 $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ ($\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为平面之法线的方向余弦) 上的封闭围线, 所围面积为 S , 求

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

积分沿围线 C 的正方向进行.

$$\begin{aligned} \text{解 若记 } P &= \begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ y & z \end{vmatrix} = z\cos\beta - y\cos\gamma, & Q &= \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ z & x \end{vmatrix} = x\cos\gamma - z\cos\alpha, \\ R &= \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ x & y \end{vmatrix} = y\cos\alpha - x\cos\beta, \end{aligned}$$

则得

$$\begin{aligned} \oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} &= \oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \\ &= 2 \iint_S (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) dS = 2 \iint_S dS = 2S. \end{aligned}$$

应用斯托克斯公式, 计算积分:

【4370】 $\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, 式中 C 为椭圆周 $x = a\sin^2 t, y = 2a\sin t \cos t, z = a\cos^2 t$ ($0 \leq t \leq \pi$), 并且以参数 t 增大的方向为积分时的正方向.

$$\text{解 } \oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = \iint_S 0dydz + 0dzdx + 0dxdy = 0.$$

【4371】 $\oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, 式中 C 为椭圆周 $x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ ($a > 0, h > 0$), 并且若从 Ox 轴正向看去, 积分是沿此椭圆依逆时针方向进行的.

解 椭圆如图 8.71 所示. 把平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ 上 C 所包围的区域记为 S , 则 S 的法线方向为 $\{h, 0, a\}$. 注意到 S 的法线方向和曲线 C 的方向是正向联系的, 即得

$$\begin{aligned} \oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz &= -2 \iint_S dydz + dzdx + dxdy = -2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \iint_S dS \\ &= -2 \left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} + 0 + \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \right) \pi a \sqrt{a^2+h^2} = -2\pi a(a+h). \end{aligned}$$

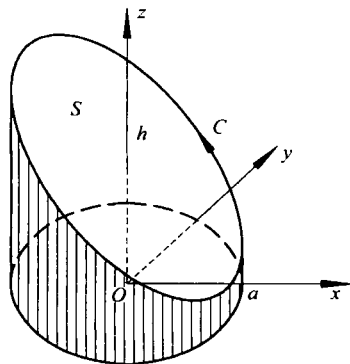


图 8.71

【4372】 $\oint_C (y^2+z^2)dx + (x^2+z^2)dy + (x^2+y^2)dz$, 式中 C 是曲线 $x^2+y^2+z^2=2Rx, x^2+y^2=2rx$ ($0 < r < R, z > 0$), 并且在沿此曲线进行积分时, 球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 外侧被该曲线所围的最小区域始终位于左边.

解 注意到球面的法线的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{x-R}{R}, \quad \cos\beta = \frac{y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{R},$$

即得

$$\oint_C (y^2+z^2)dx + (x^2+z^2)dy + (x^2+y^2)dz = 2 \iint_S [(y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma] dS$$

$$= 2 \iint_S \left[(y-z) \left(\frac{x}{R} - 1 \right) + (z-x) \frac{y}{R} + (x-y) \frac{z}{R} \right] dS = 2 \iint_S (z-y) dS.$$

由于曲面 S 关于 Oxy 平面对称, 故 $\iint_S y dS = 0$. 又 $\iint_S z dS = \iint_S R \cos \gamma dS = R \cdot \pi r^2$,

于是,
$$\oint_C (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz = 2\pi R r^2.$$

【4373】 $\oint_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, 式中 C 为用平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 截立方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ 所得截面的边界, 并且若从 Ox 轴的正向看去, 积分是沿 C 依逆时针方向进行的.

解 平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 含于立方体内的部分记为 S , 它在 Oxy 平面上的投影域记为 S_{xy} , 其面积显然等于 $\frac{3}{4}a^2$. 当平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 取上侧时, 法线方向的单位向量为 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$. 于是, 由斯托克斯公式知

$$\begin{aligned} & \oint_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz \\ &= \iint_S \left[(-2y - 2z) \frac{1}{\sqrt{3}} + (-2z - 2x) \frac{1}{\sqrt{3}} + (-2x - 2y) \frac{1}{\sqrt{3}} \right] dS \\ &= -4 \iint_S (x + y + z) \frac{1}{\sqrt{3}} dS = -6a \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}} dS = -6a \iint_{S_{xy}} dx dy = -6a \frac{3}{4} a^2 = -\frac{9}{2} a^3. \end{aligned}$$

【4374】 $\oint_C y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz$, 式中 C 为封闭曲线 $x = a \cos t, y = a \cos 2t, z = a \cos 3t$, 并且以参数 t 增大的方向为积分时的正方向.

解 取 S 为由参数方程

$$x = u \cos t, \quad y = u \cos 2t, \quad z = u \cos 3t \quad (0 \leq u \leq a, 0 \leq t \leq 2\pi)$$

表示的曲面, 则所给曲线 C 为曲面 S 的边界.

于是, 根据斯托克斯公式, 有

$$\begin{aligned} & \oint_C y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz = 2 \iint_S x^2 (y-z) dy dz + y^2 (z-x) dz dx + z^2 (x-y) dx dy \\ &= \pm 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a [u^2 \cos^2 t (u \cos 2t - u \cos 3t) (y'_t z'_t - y'_t z'_t) + u^2 \cos^2 2t (u \cos 3t - u \cos t) (z'_u x'_t - z'_t x'_u) \\ &\quad + u^2 \cos^2 3t (u \cos t - u \cos 2t) (x'_u y'_t - x'_t y'_u)] du dt \\ &= \pm 2 \int_0^a u^4 du \int_0^{2\pi} [\cos^2 t (\cos 2t - \cos 3t) (2 \sin 2t \cos 3t - 3 \cos 2t \sin 3t) + \cos^2 2t (\cos 3t - \cos t) \\ &\quad \cdot (3 \sin 3t \cos t - \sin t \cos 3t) + \cos^2 3t (\cos t - \cos 2t) (\sin t \cos 2t - 2 \sin 2t \cos t)] dt \\ &= \pm \frac{2}{5} a^5 \int_0^{2\pi} [\cos^2 t (\cos 2t - \cos 3t) (2 \sin 2t \cos 3t - 3 \cos 2t \sin 3t) + \cos^2 2t (\cos 3t - \cos t) \\ &\quad \cdot (3 \sin 3t \cos t - \sin t \cos 3t) + \cos^2 3t (\cos t - \cos 2t) (\sin t \cos 2t - 2 \sin 2t \cos t)] dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

上式中正负号应这样选取, 使得 S 的侧正好配合 C 的方向 (t 增大的方向), 积分 $\int_0^{2\pi}$ 可以换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 是因为被积函数 (t 的函数) 是周期为 2π 的函数, 而 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 等于零是因为被积函数为奇函数.

注 本题若不用斯托克斯公式, 而直接计算线积分, 则较为简单.

$$\begin{aligned} & \oint_C y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz = - \int_0^{2\pi} a^5 (\cos^2 2t \cos^2 3t \sin t + 2 \cos^2 t \cos^2 3t \sin 2t + 3 \cos^2 t \cos^2 2t \sin 3t) dt \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} a^5 (\cos^2 2t \cos^2 3t \sin t + 2 \cos^2 t \cos^2 3t \sin 2t + 3 \cos^2 t \cos^2 2t \sin 3t) dt = 0, \\ & \int_0^{2\pi} \text{可换为} \int_{-\pi}^{\pi} \text{及} \int_{-\pi}^{\pi} = 0 \text{ 的理由同上.} \end{aligned}$$

【4375】 有函数 $W(x, y, z) = ki \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS$ (k —常数),

其中曲面 S 的边界为围线 C , \mathbf{n} 为曲面 S 的法向量, \mathbf{r} 为连接空间的点 $M(x, y, z)$ 与围线 C 上的动点 $A(\xi, \eta, \zeta)$ 所成之径向量, 证明: 此函数为通过围线 C 的电流 i 所产生磁场 \mathbf{H} 的势 (参阅 4310 题).

证 利用 4340 题指出的定律, 并注意

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \mathbf{k},$$

其中 $\mathbf{r} = (\xi - x)\mathbf{i} + (\eta - y)\mathbf{j} + (\zeta - z)\mathbf{k}$, 即得

$$\mathbf{H} = ki \oint_C \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}}{r^3} \\ = ki \left[\oint_C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) d\zeta - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) d\eta \right] \mathbf{i} + \left[\oint_C \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) d\zeta \right] \mathbf{j} + \left[\oint_C \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) d\eta - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi \right] \mathbf{k}.$$

利用斯托克斯公式, 并注意

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

及 $\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0$, 从而,

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right),$$

即得

$$\mathbf{H} = ki \oint_C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) d\zeta - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) d\eta - ki \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \mathbf{i} - \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \mathbf{j} - \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \mathbf{k} \right] \cdot \mathbf{n} dS \\ = ki \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \mathbf{k} \right] \cdot \mathbf{n} dS = ki \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS = ki \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS.$$

同理,

$$\mathbf{H} = -ki \frac{\partial}{\partial y} \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS, \quad \mathbf{H} = ki \frac{\partial}{\partial z} \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS.$$

于是, 最后得

$$\mathbf{H} = \frac{\partial W}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \mathbf{k},$$

即函数 $W(x, y, z)$ 是磁场 \mathbf{H} 的势.

§ 16. 奥斯特罗格拉茨基公式

若空间区域 V 的边界 S 为分片光滑曲面, $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ 和它们的一阶偏导数均为区域 $V + S$ 内的连续函数, 则成立奥斯特罗格拉茨基公式

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

式中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

应用奥斯特罗格拉茨基公式变换下列曲面积分, 设光滑曲面 S 是有界区域 V 的边界, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦:

【4376】 $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy.$

解 由于 $P = x^2, Q = y^2, R = z^2$, 从而, $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2).$

于是,
$$\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dx dy = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

【4377】
$$\iint_S xy dx dy + xz dz dx + yz dy dz.$$

解 由于 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$, 故得

$$\iint_S xy dx dy + xz dz dx + yz dy dz = \iiint_V 0 dx dy dz = 0.$$

【4378】
$$\iint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS.$$

解 由于 $P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, R = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$

从而, $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$ 于是,

$$\iint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = 2 \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

【4379】
$$\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS.$$

解 由于 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$, 故得

$$\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS = \iiint_V \Delta u dx dy dz.$$

【4380】
$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS.$$

解 记 $P^* = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, Q^* = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, R^* = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, 则易知 $\frac{\partial P^*}{\partial x} + \frac{\partial Q^*}{\partial y} + \frac{\partial R^*}{\partial z} = 0.$

于是, 原曲面积分等于零.

【4381】 证明: 若 S 为封闭的简单曲面, 而 l 为任何的固定方向, 则

$$\iint_S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) dS = 0,$$

式中 \mathbf{n} 为曲面 S 的外法向量.

证明思路 注意 $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) = \cos \alpha \cos(l, x) + \cos \beta \cos(l, y) + \cos \gamma \cos(l, z),$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为 \mathbf{n} 的方向余弦, 并利用奥氏公式, 命题即获证.

证 因为 $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) = \cos \alpha \cos(l, x) + \cos \beta \cos(l, y) + \cos \gamma \cos(l, z),$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为 \mathbf{n} 的方向余弦, 故有

$$\iint_S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) dS = \iint_S \cos(l, x) dy dz + \cos(l, y) dz dx + \cos(l, z) dx dy.$$

由于 l 为固定方向, 从而, $\cos(l, x), \cos(l, y), \cos(l, z)$ 均为常数. 于是,

$$\iint_S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) dS = \iiint_V \left[\frac{\partial \cos(l, x)}{\partial x} + \frac{\partial \cos(l, y)}{\partial y} + \frac{\partial \cos(l, z)}{\partial z} \right] dx dy dz = \iiint_V 0 dx dy dz = 0.$$

【4382】 证明: 以曲面 S 为界的物体的体积等于

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS,$$

式中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

证明思路 利用 $\iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$ 及奥氏公式, 命题易获证.

证 由奥氏公式, 有

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS &= \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iiint_V 3 dx dy dz = 3V, \end{aligned}$$

由此可知 $V = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS$. 证毕.

【4383】 证明:以光滑锥面 $F(x, y, z) = 0$ 和平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 为界的锥体的体积等于

$$V = \frac{1}{3} SH,$$

式中 S 为位于该平面上的锥底之面积, H 为锥体的高.

证 证法 1:

不失一般性,设坐标原点位于锥面 $F(x, y, z) = 0$ 的顶点. 于是, $F(x, y, z)$ 是 x, y, z 的二次齐次函数. 因此,根据齐次函数的欧拉定理知,

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = 2F(x, y, z). \quad (1)$$

由 4382 题的结果,有

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \iint_{S \cup S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS \\ &= \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS + \frac{1}{3} \iint_{S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 S 为锥底(位于平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 上),而 S_1 是锥的侧面. 在锥面 S_1 (即 $F(x, y, z) = 0$) 上,有

$$\cos \alpha = \frac{F'_x}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}, \quad \cos \beta = \frac{F'_y}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}, \quad \cos \gamma = \frac{F'_z}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}.$$

于是,注意到(1)式,即知在 S_1 上有

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \frac{x F'_x + y F'_y + z F'_z}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} = \frac{2F(x, y, z)}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} = 0,$$

从而,

$$\iint_{S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = 0. \quad (3)$$

又在平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 上,有

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = H,$$

其中 $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ 是从原点 $(0, 0, 0)$ 到点 (x, y, z) 的向径, \mathbf{n} 为平面(锥底)的单位外法向量, H 为从原点到平面的距离(即锥体的高). 于是,

$$\iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = H \iint_S dS = HS.$$

由此,再注意到(2)式与(3)式,即得 $V = \frac{1}{3} SH$.

证法 2:

取坐标系 $Ox'y'z'$, 使锥的顶点在坐标原点, $Ox'y'$ 平面平行于锥的底面, 由于在 z 处的锥的截面面积为

$$S(z') = \frac{S z'^2}{H^2},$$

故所求的体积为

$$V = \int_0^H S(z') dz' = \int_0^H \frac{S}{H^2} z'^2 dz' = \frac{1}{3} SH.$$

【4384】 求以曲面 $z = c$ 及 $x = a \cos u \cos v + b \sin u \sin v$, $y = a \cos u \sin v - b \sin u \cos v$, $z = c \sin u$ 为界的物体的体积.

解 解法 1:

我们有

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u, \quad (1)$$

以 $z = c \sin u$ 代入得

$$x^2 + y^2 + \frac{a^2 - b^2}{c^2} z^2 = a^2, \quad (2)$$

故所界物体由平面 $z = c, z = -c$ 及曲面(2)围成. 利用 1382 题的结果, 即知所求的体积为

$$V = \frac{1}{3} \iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS, \quad (3)$$

其中 S_1, S_2 分别是平面 $z = c, z = -c$ 上的部分(此时 $u = \frac{\pi}{2}, u = -\frac{\pi}{2}$, 从而 $x^2 + y^2 = b^2$, 故 S_1, S_2 为圆盘 $x^2 + y^2 \leq b^2$), S_3 表曲面(2)的部分, $x \cos \alpha, y \cos \beta, z \cos \gamma$ 表外法线的方向余弦. 显然, 在 S_1 上, $\cos \alpha = \cos \beta = 0, \cos \gamma = \frac{c}{c}$. 于是,

$$\iint_{S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = \iint_{S_1} \frac{c}{c} dS = |c| \pi b^2.$$

同理可得

$$\iint_{S_2} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = -|c| \pi b^2.$$

此外, 有

$$\begin{aligned} & \iint_{S_3} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = \iint_{S_3} x dy dz + y dz dx + z dx dy \\ & = + \int_0^{2\pi} dv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(a \cos u \cos v + b \sin u \sin v)(y'_u z'_v - y'_v z'_u) + (a \cos u \sin v - b \sin u \cos v)(z'_u x'_v - z'_v x'_u) \\ & \quad + c \sin u (x'_u y'_v - x'_v y'_u)] du \\ & = + \int_0^{2\pi} dv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ca^2 \cos u du = \pm 4\pi ca^2, \end{aligned} \quad (4)$$

其中的正负号应这样选取, 使对应于 S_3 的外侧. 下面确定此正负号. 由(2), S_3 的方程可写为 $F(x, y, z) = a^2$, 其中 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + \frac{a^2 - b^2}{c^2} z^2$ 是二次齐次函数. 于是, 在 S_3 上, 有

$$\cos \alpha = \frac{F'_x}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}, \quad \cos \beta = \frac{F'_y}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}, \quad \cos \gamma = \frac{F'_z}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}.$$

其中正号对应于 S_3 的一侧, 负号对应于 S_3 的另一侧. 于是, 根据齐次函数的欧拉定理, 在 S_3 (外侧) 上有

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \frac{x F'_x + y F'_y + z F'_z}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} = \frac{2F}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} = \frac{2a^2}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}, \quad (5)$$

但在 S_3 与 Oxy 平面的交线(即 $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$)的各点上, 对 S_3 的外侧, 显然有(注意到曲面(2)关于 Oxy 坐标平面对称)

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} > 0,$$

(这是因为此时径向向量 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 与单位外法向量 \mathbf{n} 的方向一致), 由此可知, 在(5)式中应取正号. 于是,

$$\iint_{S_3} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = \iint_{S_3} \frac{2a^2}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} dS > 0.$$

从而, 由(1)式知

$$\iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = |c| \pi b^2 + 4\pi ca^2.$$

综上所述, 最后得(注意(3)式)

$$V = \frac{1}{3} (4\pi |c| a^2 + |c| \pi b^2 + |c| \pi b^2) = \frac{4\pi}{3} \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right) |c|.$$

解法 2:

不用曲面积分求体积的公式(3),而直接计算体积较为简单.由(1)式知,平面 z -常数(即 u -常数)与曲面(2)的截面 $S(z)$ 是圆,故所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a dz \iint_{S(z)} dx dy = \int_0^a S(z) dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u) |c| d(\sin u) \\ &= |c| \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2 u] d(\sin u) = \pi |c| \left[2a^2 + \frac{2}{3}(b^2 - a^2) \right] \frac{4\pi}{3} \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right) |c|. \end{aligned}$$

【4385】 求以曲面 $x = u \cos v, y = u \sin v, z = -u + a \cos v$ ($u \geq 0$) 及平面 $x = 0, z = 0$ ($a > 0$) 为界的物体的体积.

解 解法 1:

用 S_1 表物体位于平面 $z=0$ 上的那一部分, S_2 为物体表面由所给参数方程给出的曲面上那一部分,此外,物体表面在平面 $x=0$ 上的那部分显然是一段 $x=0, y=0, 0 \leq z \leq a$. 于是,利用 4382 题的结果,即知所求体积为

$$V = \frac{1}{3} \iint_{S_1 \cup S_2} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS, \quad (1)$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是向外法线的方向余弦. 显然,在 S_1 上, $\cos \alpha = 0, \cos \beta = 0, \cos \gamma = -1, z = 0$, 故

$$\iint_{S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = 0. \quad (2)$$

此外,我们有

$$\begin{aligned} & \iint_{S_2} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = \iint_{S_2} x dy dz + y dz dx + z dx dy \\ &= \pm \iint_D [u \cos v (y'_v z'_v - y'_v z'_u) + u \sin v (z'_u x'_v - z'_v x'_u) + (-u + a \cos v) (x'_u y'_v - x'_v y'_u)] du dv \\ &= \pm \iint_D [u \cos v (u \cos v - a \sin^2 v) + u \sin v (a \sin v \cos v + u \sin v) + (-u + a \cos v) u] du dv \\ &= \pm \iint_D a u \cos v du dv = \pm \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{a \cos v} a u \cos v du = \pm \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} a \cos^3 v \right) dv \\ &= \pm \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 (1 - \sin^2 v) d(\sin v) = \pm a^3 \left(\sin v - \frac{\sin^3 v}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pm \frac{2}{3} a^3, \end{aligned}$$

其中的正负号应这样选取,使对应于 S_2 的外侧, D 为 u, v 的变化区域(对应于 S_2). 由此,再注意到(1)式与(2)式,即得 $V = \pm \frac{2}{9} a^3$. 但体积恒为正($V > 0$),故必有 $V = \frac{2}{9} a^3$.

解法 2:

本题若不利用曲面积分计算体积的公式(1),而直接计算体积,则较为简单.(下面 Ω 表物体在 Oxy 平面上的投影):

$$\begin{aligned} V &= \iint_D z dx dy = \iint_D (-u + a \cos v) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv = \iint_D (-u + a \cos v) u du dv \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{a \cos v} (-u + a \cos v) u du = -\frac{a^3}{6} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v dv = -\frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 v) d(\sin v) = \frac{2}{9} a^3. \end{aligned}$$

【4386】 证明公式:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z, t) dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0).$$

证 证法 1:

作变量代换 $x = tu, y = tv, z = tw$ ($t > 0$ 固定), 则(利用奥氏公式)

$$\frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} t^3 f(tu, tv, tw, t) du dv dw \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} \left[t^3 \left(\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w + \frac{\partial f}{\partial t} \right) + 3t^2 f \right] du dv dw \\
& + \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} t^3 \left\{ \frac{1}{t} \left[\frac{\partial}{\partial x}(fx) + \frac{\partial}{\partial y}(fy) + \frac{\partial}{\partial z}(fz) \right] \right\} du dv dw + \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} t^3 \frac{\partial f}{\partial t} du dv dw \\
& + \frac{1}{t} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \left[\frac{\partial}{\partial x}(fx) + \frac{\partial}{\partial y}(fy) + \frac{\partial}{\partial z}(fz) \right] dx dy dz + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \\
& = \frac{1}{t} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} (fx \cos \alpha + fy \cos \beta + fz \cos \gamma) dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0),
\end{aligned}$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ 上向外法线的方向余弦. 显然 $\cos \alpha = \frac{x}{t}, \cos \beta = \frac{y}{t}, \cos \gamma = \frac{z}{t}$. 故

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} (fx \cos \alpha + fy \cos \beta + fz \cos \gamma) dS = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f \cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{t} dS = t \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f dS.$$

于是, 最后得

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0).$$

证法 2:

不利用奥氏公式更简单些. 采用球坐标, 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right) &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t \left[\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi, t) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi \right] dr \right\} \\
&= \int_0^t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t \cos \varphi \cos \psi, t \sin \varphi \cos \psi, t \sin \psi, t) t^2 \cos \psi d\psi d\varphi + \int_0^t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial t} f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi, t) \\
&\quad \cdot r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \\
&= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z) dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz.
\end{aligned}$$

利用奥斯特罗格拉茨基公式计算下列曲面积分:

【4387】 $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 式中 S 为立方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ 的外表面.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy - 2 \iiint_V (x+y+z) dx dy dz \\
& - 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x+y+z) dz = 6 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a z dz = 3a^4.
\end{aligned}$$

【4388】 $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 式中 S 为球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外表面.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^a r^4 \cos \psi dr \\
& = 6\pi \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \right) \left(\int_0^a r^4 dr \right) = \frac{12}{5} \pi a^5.
\end{aligned}$$

【4389】 $\iint_S (x-y+z) dy dz + (y-z+x) dz dx + (z-x+y) dx dy$, 式中 S 为曲面

$$|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$$

的外侧.

$$\text{解} \quad \iint_S (x-y+z) dy dz + (y-z+x) dz dx + (z-x+y) dx dy = \iiint_V 3 dx dy dz,$$

其中 V 为由曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 围成的区域. 作变换 $u=x-y+z, v=y-z+x, w=z-x+y$, 则 $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=4$, 且由 $|u|+|v|+|w|=1$ 围成的体积等于 $\frac{4}{3}$. 于是, 所求的积分为

$$\iiint_S (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dx dy = \iiint_{|u|+|v|+|w|\leq 1} 3 \cdot \frac{1}{4} du dv dw = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1.$$

*) 由 $|u|+|v|+|w|=1$ 围成的体积是对称于坐标原点的正八面体的体积, 其大小等于由平面 $u+v+w=1, u=0, v=0, w=0$ 所围成的四面体体积的 8 倍, 即为 $8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{4}{3}$.

【4390】 计算

$$\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS,$$

式中 S 为部分圆锥面 $x^2+y^2-z^2 (0 \leq z \leq h)$, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为此曲面外法线的方向余弦.

提示 并合平面 $S_1: z=h, x^2+y^2 \leq h^2$ 的部分组成封闭曲面.

解 并合平面 $S_1: z=h, x^2+y^2 \leq h^2$ 的部分组成封闭曲面: $S+S_1$, 它是空间区域 V 的边界, 利用奥氏公式, 即得

$$\begin{aligned} \iint_{S+S_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS &= 2 \iiint_V (x+y+z) dx dy dz - 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_r^h [r(\cos \varphi + \sin \varphi) + z] dz \\ &= 2\pi \int_0^h (rh^2 - r) dr = \frac{\pi h^4}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{又因} \quad \iint_{S_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = h^2 \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} dx dy = \pi h^4,$$

$$\text{于是,} \quad \iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi h^4}{2}.$$

【4391】 证明公式:

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS,$$

其中封闭曲面 S 为区域 V 的表面, \mathbf{n} 为封闭曲面 S 上的点 (ξ, η, ζ) 处的外法向量, 而

$$r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2},$$

\mathbf{r} 为从点 (x, y, z) 到点 (ξ, η, ζ) 的径向量.

提示 研究两种情形: (1) 由面 S 不包围点 (x, y, z) ; (2) 曲面 S 包围点 (x, y, z) .

证 先设曲面 S 不包围点 (x, y, z) (即点 (x, y, z) 在 V 之外), 我们有

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \cos(\mathbf{r}, x) \cos \alpha + \cos(\mathbf{r}, y) \cos \beta + \cos(\mathbf{r}, z) \cos \gamma,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为 \mathbf{n} 的方向余弦. 由于

$$\cos(\mathbf{r}, x) = \frac{\xi-x}{r}, \quad \cos(\mathbf{r}, y) = \frac{\eta-y}{r}, \quad \cos(\mathbf{r}, z) = \frac{\zeta-z}{r},$$

故

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \frac{\xi-x}{r} \cos \alpha + \frac{\eta-y}{r} \cos \beta + \frac{\zeta-z}{r} \cos \gamma.$$

于是, 利用奥氏公式, 即得

$$\begin{aligned} \iint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS &= \iint_S \left(\frac{\xi-x}{r} \cos \alpha + \frac{\eta-y}{r} \cos \beta + \frac{\zeta-z}{r} \cos \gamma \right) dS \\ &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi-x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta-y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta-z}{r} \right) \right] d\xi d\eta d\zeta - \iiint_V \frac{2}{r} d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

故

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS.$$

次设曲面 S 包围点 (x, y, z) . 这时, 不能对 V 应用奥氏公式, 必须用一小区域将点 (x, y, z) 挖掉, 即以点 (x, y, z) 为中心, ϵ 为半径作一开球域 V_ϵ (ϵ 充分小), 其边界 (球面) 以 S_ϵ 表示. 对闭区域 $V-V_\epsilon$, 应用奥氏公式, 仿上可得

$$\iint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS + \iint_{S_\epsilon} \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS = \iiint_{V-V_\epsilon} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi-x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta-y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta-z}{r} \right) \right] d\xi d\eta d\zeta$$

$$= 2 \iiint_{V_\epsilon} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}.$$

但在 S_ϵ 上, \mathbf{n} 的方向与 \mathbf{r} 的方向相反, 故 $\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = -1$. 于是,

$$\iint_{S_\epsilon} \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS = -4\pi\epsilon^2.$$

由此可知, 在前式中令 $\epsilon \rightarrow +0$ 取极限, 即得

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\iiint_{V_\epsilon} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} - \frac{1}{2} \iint_{S_\epsilon} \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS \right).$$

证毕.

【4392】 计算高斯积分
$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS,$$

式中 S 为简单封闭光滑曲面, 它是区域 V 的边界, \mathbf{n} 为曲面 S 上在点 (ξ, η, ζ) 处的外法向量, \mathbf{r} 为连接点 (x, y, z) 和点 (ξ, η, ζ) 的径向量, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$.

研究两种情形: (1) 曲面 S 不包围点 (x, y, z) ; (2) 曲面 S 包围点 (x, y, z) .

解 设法线 \mathbf{n} 的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, 则

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \cos(\mathbf{r}, x)\cos\alpha + \cos(\mathbf{r}, y)\cos\beta + \cos(\mathbf{r}, z)\cos\gamma = \frac{\xi - x}{r}\cos\alpha + \frac{\eta - y}{r}\cos\beta + \frac{\zeta - z}{r}\cos\gamma.$$

因此, 高斯积分
$$I(x, y, z) = \iint_S \left(\frac{\xi - x}{r^3} d\eta d\zeta + \frac{\eta - y}{r^3} d\zeta d\xi + \frac{\zeta - z}{r^3} d\xi d\eta \right),$$

这里 $P = \frac{\xi - x}{r^3}, Q = \frac{\eta - y}{r^3}, R = \frac{\zeta - z}{r^3}$. 于是,

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\xi - x)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial Q}{\partial \eta} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\eta - y)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial R}{\partial \zeta} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\zeta - z)^2}{r^5}.$$

它们仅在点 (x, y, z) 处不连续. 因此,

(1) 当曲面 S 不包围点 (x, y, z) 时, 则 $\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial R}{\partial \zeta} = 0$. 于是, 利用奥氏公式, 有

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = 0.$$

(2) 当曲面 S 包围点 (x, y, z) 时, 则我们以点 (x, y, z) 为中心, ϵ 为半径作一球 V_ϵ 包围在 S 内, 此球面记以 S_ϵ , 将奥氏公式用于 $V - V_\epsilon$ 上, 即得

$$\iint_{S - S_\epsilon} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = 0.$$

但因 $\iint_{S_\epsilon} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = \iint_{S_\epsilon} \left(-\frac{1}{\epsilon^2} \right) dS = -4\pi$, 故得

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = 4\pi.$$

【4393】 证明: 若

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

有界区域 V 的边界 S 为光滑曲面, 则成立下列公式:

$$(1) \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_V \Delta u dx dy dz; \quad (2) \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz + \iiint_V u \Delta u dx dy dz,$$

式中 u 及其二阶偏导数是在区域 $V + S$ 内连续的函数, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 的外法线的导数.

证明思路 只要注意

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma,$$

利用奥氏公式, (1) 及 (2) 的公式均获证.

证 (1) 由于 $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$, 因此, 利用奥氏公式即得

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz - \iiint_V \Delta u dx dy dz.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + u \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + u \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\ &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\ &= \iiint_V u \Delta u dx dy dz + \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

【4394】 证明三维情形的格林第二公式:

$$\iiint_V \left| \begin{array}{cc} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{array} \right| dx dy dz = \iint_{\Sigma} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{array} \right| dS,$$

式中区域 V 以曲面 S 为界, \mathbf{n} 是曲面 S 的外法向量, 而函数 $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)$ 在区域 $V + S$ 内二阶可微.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \iint_{\Sigma} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{array} \right| dS &= \iint_{\Sigma} \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \alpha + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos \beta + \left(v \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos \gamma \right] dS \\ &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\ &= \iiint_V \left[v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right] dx dy dz \\ &= \iiint_V \left| \begin{array}{cc} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{array} \right| dx dy dz. \end{aligned}$$

【4395】 设函数 $u = u(x, y, z)$ 在某区域内具有连续的一阶和二阶导数, 若

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

则 $u(x, y, z)$ 称为此区域内的调和函数.

证明: 若有界闭区域 V 以光滑曲面 S 为界, u 是此区域内的调和函数, 则成立下列公式:

$$(1) \quad \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0; \quad (2) \quad \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

式中 \mathbf{n} 为曲面 S 的外法向量.

用公式(2)证明: 区域 V 内的调和函数由它在边界 S 上的值唯一地确定.

证 (1) 由于 $\Delta u = 0$, 故利用 4393 题(1)的结果, 即得

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V 0 dx dy dz = 0.$$

(2) 利用 4393 题(2)的结果, 即得

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \iiint_V u \cdot 0 dx dy dz + \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \\ &= \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

与 4333 题一样, 只要证明: 若在边界 S 上调和函数 $u = 0$, 则它在区域 V 上也恒有 $u = 0$. 事实上, 利用本题(2), 得

$$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = 0,$$

因此,

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

即在区域 V 上 $u = \text{常数}$. 但在 S 上 $u = 0$, 故在区域 V 上 $u = 0$. 这就是证明: 在区域 V 内的调和函数由它在边界 S 上的值唯一地确定.

【4396】 证明: 若函数 $u = u(x, y, z)$ 是以光滑曲面 S 为界的有界闭区域 V 内的调和函数, 则

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS,$$

式中 \mathbf{r} 是从区域 V 的内点 (x, y, z) 引至曲面上的点 (ξ, η, ζ) 的径向量,

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

\mathbf{n} 为曲面 S 上在点 (ξ, η, ζ) 的外法向量.

证 在 4394 题中令 $v = \frac{1}{r}$, 则当 $(\xi, \eta, \zeta) \neq (x, y, z)$ 时, 有 $\Delta v = 0$. 现以点 $P(x, y, z)$ 为中心, ρ 为半径作

一球面 S_ρ 含于曲面 S 内, 再将 4394 题应用到由曲面 $S + S_\rho$ 所包围的区域 V 内, 即得

$$\iint_{S \cup S_\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS = 0.$$

或

$$\iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS = - \iint_{S_\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS.$$

显然, S 上的法线是向外的, 而 S_ρ 上的法线是指向球心的, 即指向半径减少的一方. 因此,

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} = - \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial r} \Big|_{r=\rho} = - \frac{1}{\rho^2}.$$

于是, 我们有

$$\iint_{S_\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{u}{\rho^2} \right) dS = - \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS.$$

但 $\iint_{S_\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{\rho} \iint_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$, 又利用中值定理, 得

$$\iint_{S_\rho} \frac{u}{\rho^2} dS = \frac{1}{\rho^2} u(x', y', z') 4\pi\rho^2 = 4\pi u(x', y', z'),$$

其中 $u(x', y', z')$ 为函数 u 在球面 S_ρ 上某点之值. 从而,

$$u(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS.$$

上式右端与 ρ 无关. 而 $\lim_{\rho \rightarrow +0} u(x', y', z') = u(x, y, z)$. 因而, 令 $\rho \rightarrow +0$, 即得

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS.$$

又由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} &= \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \cos \alpha + \frac{\partial r}{\partial \eta} \cos \beta + \frac{\partial r}{\partial \zeta} \cos \gamma \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\xi - x}{r} \cos \alpha + \frac{\eta - y}{r} \cos \beta + \frac{\zeta - z}{r} \cos \gamma \right) = \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2}. \end{aligned}$$

故最后得

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS.$$

【4397】 证明: 若半径为 R 的球的球心位于点 (x_0, y_0, z_0) , $u = u(x, y, z)$ 为此球内的调和函数, 则

$$u(x_0, y_0, z_0) - \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(x, y, z) dS$$

(中值定理).

证 在球 S 上应用 4396 题的结果, 即得

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{u \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{u}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(x, y, z) dS.$$

*) 利用 4395 题的结果, 有 $\frac{1}{4\pi R} \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$.

【4398】 证明: 若有界闭区域 V 内的连续函数 $u = u(x, y, z)$, 在此区域内是调和函数, 并且它不是常数, 则此函数在区域内的点不能达到最大值和最小值(极大值原理).

证 证明与 4337 题(平面情形)完全类似. 设有界闭区域为 Ω , 它是由有界开区域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 构成. 我们要证明: 如果 $u(x, y, z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 的某内点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 达到其最大值或最小值(例如, 设达到最大值), 则 $u(x, y, z)$ 在 Ω 上必为常数. 分三步证明:

(1) 先证: 若球域 $V_\rho = \{(x, y, z) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq \rho^2\}$ 完全属于 Ω , 则 $u(x, y, z)$ 在 V_ρ 上为常数.

对任何的 $0 < r \leq \rho$, 用 S_r 表球面 $\{(x, y, z) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\}$. 由 4397 题的结果可知

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} u(x, y, z) dS,$$

故
$$\frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} [u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z)] dS = 0. \quad (1')$$

但因 $u(x_0, y_0, z_0)$ 是最大值, 故在 S_r 上恒有

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \geq 0.$$

由此, 根据 (1'), 即易知在 S_r 上 $u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \equiv 0$. 因为, 若有某点 $(x_1, y_1, z_1) \in S_r$, 使

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x_1, y_1, z_1) = \tau > 0,$$

则由 $u(x, y, z)$ 的连续性可知, 必有以 (x_1, y_1, z_1) 为中心的某小球域 σ 存在, 使当 $(x, y, z) \in \sigma$ 时, 恒有

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \geq \frac{\tau}{2}.$$

用 S'_r 表 S_r 含于 σ 内的部分, 则

$$\iint_{S'_r} [u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z)] dS \geq \iint_{S'_r} [u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z)] dS \geq \iint_{S'_r} \frac{\tau}{2} dS = \frac{1}{2} \tau D_r > 0,$$

其中 D_r 表 S'_r 的面积, 此显然与 (1') 式矛盾. 于是, 在 S_r 上有

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) = 0.$$

再根据 r 的任意性 ($0 < r \leq \rho$), 即知对任何 $(x, y, z) \in V_\rho$, 都有 $u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0)$. 换句话说, $u(x, y, z)$ 在 V_ρ 上是常数.

(2) 次证: 设 $P^*(x^*, y^*, z^*)$ 为 Ω 的任一内点 (即 $P^* \in \Omega$), 则必有

$$u(x^*, y^*, z^*) = u(x_0, y_0, z_0).$$

用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 与点 $P^*(x^*, y^*, z^*)$ 连接起来, 用 δ 表 $\partial\Omega$ 与 l 之间的距离, 即

$$\delta = \min \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

其中 \min 是对一切 $(x, y, z) \in \partial\Omega, (x', y', z') \in l$ 来取的 (由于 $\partial\Omega, l$ 是互不相交的有界闭集, 可证 \min 一定能达到, 从而 $\delta > 0$). 取 $0 < \delta' < \delta$.

以点 P_0 为中心, δ' 为半径作一球, 得球域

$$V_{\delta'} = \{(x, y, z) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq \delta'^2\},$$

此球域完全含于 Ω 内, 由 (1) 段已证的结果知, $u(x, y, z)$ 在 $V_{\delta'}$ 上为常数, 特别是 $u(x_1, y_1, z_1) = u(x_0, y_0, z_0)$.

这里点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 代表球面

$$S = \{(x, y, z) | (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \delta^2\}$$

与折线 l 的交点(参看 1337 题的图 8.68).

又以点 P_1 为中心, δ' 为半径作一球, 得球域

$$V_1 = \{(x, y, z) | (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \leq \delta'^2\}.$$

于是, V_1 也完全含于 Ω 内. 由于 $u(x, y, z)$ 也在 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 点达到最大值, 故将(1)段的结果用于 V_1 , 可知 $u(x, y, z)$ 在 V_1 上是常数. 特别是 $u(x', y', z') = u(x_1, y_1, z_1)$. 这里点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 为球面

$$S_1 = \{(x, y, z) | (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \delta'^2\}$$

与 l 的交点(除 P_1 外的另一交点).

再以点 P_2 为中心, δ' 为半径作一球域 V_2, \dots , 这样继续下去. 显然, 至多经过 n 次(n 为大于 $\frac{\lambda}{\delta}$ 的最小正整数, λ 表折线 l 的长), 点 $P' (x', y', z')$ 必属于 V_{n-1} . 从而,

$$u(x', y', z') = u(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) = \dots = u(x_1, y_1, z_1) = u(x_0, y_0, z_0).$$

(3) 由(2)段的结果知, $u(x, y, z)$ 在 Ω 上是常数. 根据 $u(x, y, z)$ 在 Ω 上的连续性, 通过由 Ω 的点趋向 $\partial\Omega$ 的点取极限, 即知 $u(x, y, z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是常数. 证毕.

注 从证明过程中看出, 需假定区域 Ω (从而 $\bar{\Omega}$) 是连通的. 事实上, 若 Ω 不连通, 则结论不一定成立. 例如, 设 $\Omega = V_1 \cup V_2$, 其中 V_1 与 V_2 是两个互无公共点的闭球域, 而令

$$u(x, y, z) = \begin{cases} C_1, & (x, y, z) \in V_1, \\ C_2, & (x, y, z) \in V_2, \end{cases}$$

其中 $C_1 \neq C_2$ 是两个常数, 则 $u(x, y, z)$ 显然是 $\bar{\Omega}$ 上的调和函数且在 $\bar{\Omega}$ 上不是常数, 但它却在其内点达到最大值与最小值.

【4399】 设物体 V 全部浸于液体中, 利用帕斯卡定律证明: 液体的浮力等于物体所排开的液体的重量, 而方向是竖直向上(阿基米德定律).

证 将 Oxy 坐标面取在液面上, 而 Oz 轴垂直液面向下. 设液体密度为 ρ , 浸入液体的物体 V 的表面积为 S . 若对应于面积元素 dS 液体的深度为 z , 则在 dS 上所受的压力为 $\rho z dS$. 由于此压力总是垂直于 dS 面的, 故压力在各坐标轴上的投影为 $-\rho z \cos \alpha dS$, $-\rho z \cos \beta dS$, $-\rho z \cos \gamma dS$. 利用奥氏公式, 即得作用于物体整个表面的总压力在各坐标轴上的投影

$$P_x = -\rho \iint_S z \cos \alpha dS = -\rho \iiint_V 0 dx dy dz = 0,$$

$$P_y = -\rho \iint_S z \cos \beta dS = -\rho \iiint_V 0 dx dy dz = 0,$$

$$P_z = -\rho \iint_S z \cos \gamma dS = -\rho \iiint_V dx dy dz = -\rho V.$$

因此, 压力的主向量即合力, 朝着竖直向上的方向, 其大小等于被物体排开的液体的重量. 这就是阿基米德定律.

【4400】 设 S_t 是动球面 $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$, 而函数 $f(\xi, \eta, \zeta)$ 是连续的, 证明: 函数

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS_t$$

满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

和初始条件 $u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = f(x, y, z)$.

证 首先指出, 本题应设 $f(\xi, \eta, \zeta)$ 具有连续的二阶偏导数. 先验证函数 u 满足初始 $u|_{t=0} = 0$ 条件(意

即 $\lim_{t \rightarrow 0} u = 0$ 及 $\frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, z)$ (意即 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, z)$). 今固定 (x, y, z) . 由连续性知, 存在常数 $M > 0$,

使当 $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \leq t^2$ 时, 恒有

$$f(\xi, \eta, \zeta) \leq M, \quad f'_\xi(\xi, \eta, \zeta) \leq M, \quad |f'_\eta(\xi, \eta, \zeta)| \leq M, \quad f'_\zeta(\xi, \eta, \zeta) \leq M.$$

当 $0 < t < 1$ 时, 我们有

$$|u(x, y, z, t)| \leq \frac{1}{4\pi t} \iint_{S_t} |f(\xi, \eta, \zeta)| dS_t \leq \frac{1}{4\pi t} \iint_{S_t} M dS_t = \frac{1}{4\pi t} M 4\pi t = M.$$

由此可知, $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, y, z, t) = 0$.

又作变量代换 $\xi = x + ut, \eta = y + vt, \zeta = z + wt$, 则有

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S f(x + ut, y + vt, z + wt) t dS, \quad (1)$$

其中 S 是单位球面 $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. 于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S f(x + ut, y + vt, z + wt) t dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} u + \frac{\partial f}{\partial \eta} v + \frac{\partial f}{\partial \zeta} w \right) t dS + \frac{1}{4\pi} \iint_S f(x + ut, y + vt, z + wt) dS = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (2)$$

显然, 当 $0 < t < 1$ 时,

$$|I_1| \leq \frac{t}{4\pi} \iint_S 3M dS = 3Mt,$$

故 $\lim_{t \rightarrow 0} I_1 = 0$. 又显然 (由于连续性)

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_2 = \frac{1}{4\pi} \iint_S f(x, y, z) dS = \frac{f(x, y, z)}{4\pi} \iint_S dS = f(x, y, z).$$

因此, 得

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, z).$$

下面再验证 u 满足波动方程. 由 (2) 式, 利用奥氏公式, 有 (V 为球体 $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$, V_r 为球体 $u^2 + v^2 + w^2 \leq r^2$)

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{t}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \cos \gamma \right) dS = \frac{t^2}{4\pi} \iiint_{V_r} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) f(x + ut, y + vt, z + wt) du dv dw \\ &= \frac{1}{4\pi t} \iiint_{V_r} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) f(x + u_1, y + v_1, z + w_1) du_1 dv_1 dw_1 \\ &= \frac{1}{4\pi t} \iiint_{V_r} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(x + u_1, y + v_1, z + w_1) du_1 dv_1 dw_1 \\ &= \frac{1}{4\pi t} \Delta \left(\iiint_{V_r} f(x + u_1, y + v_1, z + w_1) du_1 dv_1 dw_1 \right) \\ &= \frac{1}{4\pi t} \Delta \left(\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x + r \cos \psi \cos \varphi, y + r \cos \psi \sin \varphi, z + r \sin \psi) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \right) = \frac{I_3}{4\pi t}, \end{aligned}$$

其中 $\cos \alpha = u, \cos \beta = v, \cos \gamma = w$ 为 S 的外法线的方向余弦. 又由 (2) 式及 (1) 式, 有

$$I_2 = \frac{1}{4\pi t} \iint_S f(x + ut, y + vt, z + wt) t dS = \frac{u}{t}.$$

从而, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{I_3}{4\pi t} + \frac{u}{t}$ ($t > 0$). 于是,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I_3}{\partial t} - \frac{I_3}{4\pi t^2} = \frac{u}{t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I_3}{\partial t} - \frac{I_3}{4\pi t^2} = \frac{u}{t^2} + \frac{1}{t} \left(\frac{I_3}{4\pi t} + \frac{u}{t} \right) = \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I_3}{\partial t} \quad (t > 0). \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{但} \quad \frac{\partial I_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \Delta \left[\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x + r \cos \psi \cos \varphi, y + r \cos \psi \sin \varphi, z + r \sin \psi) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \right] \\ &= \Delta \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x + r \cos \psi \cos \varphi, y + r \cos \psi \sin \varphi, z + r \sin \psi) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \right] \end{aligned}$$

$$-\Delta \left[\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+t\cos\psi\cos\varphi, y+t\cos\psi\sin\varphi, z+t\sin\psi) t^2 \cos\psi d\psi d\varphi \right] = \Delta \left[\iint_{S_t} f(\xi, \eta, \zeta) dS_t \right]$$

$$\text{故} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi t} \Delta \left(\iint_{S_t} f(\xi, \eta, \zeta) dS_t \right) = \Delta \left(\frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS_t \right) = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (t > 0).$$

证毕.

§ 17. 场论初步

1° **梯度** 若 $u(\mathbf{r}) = u(x, y, z)$ (其中 $\mathbf{r} = xi + yj + zk$) 是连续可微标量场, 则称向量

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

为它的梯度, 简记为 $\text{gradu} = \nabla u$, 其中 $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$. 场 u 在已知点 (x, y, z) 的梯度的方向与过此点的等值面 $u(x, y, z) = C$ 的法线方向一致. 对于场的每一点, 此向量给出函数 u 变化率最大的方向和大小,

$$|\text{gradu}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

场 u 在某方向 $l \{ \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \}$ 上的导数等于:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{gradu} \cdot \mathbf{l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma.$$

2° **场的散度与旋度** 若

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

是连续可微向量场, 则称标量

$$\text{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

为这个场的散度.

向量

$$\text{rota} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

称为场的旋度.

3° **向量通过曲面的通量** 若 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 给出区域 Ω 内的向量场, S 是此区域内的曲面, $\mathbf{n} \{ \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \}$ 是曲面 S 的单位法向量, 则称积分

$$\iint_S a_n dS = \iint_S (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma) dS$$

(式中 $a_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ 为向量的法向分量) 为向量 \mathbf{a} 在单位法向量 \mathbf{n} 所指的方向上通过所给曲面 S 的通量. 以向量形式表述的奥斯特罗格拉茨基公式为

$$\iint_S a_n dS = \iiint_V \text{div} \mathbf{a} dx dy dz,$$

式中曲面 S 为区域 V 的边界, \mathbf{n} 为曲面 S 的单位外法向量.

4° **向量的环量数**

$$\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_C a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

称为向量 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 沿某曲线 C 的曲线积分(场的功).

若 C 是封闭围线, 则称曲线积分为向量 \mathbf{a} 沿围线 C 的环量.

以向量形式表述的斯托克斯公式为 $\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rota})_n dS,$

式中封闭围线 C 为曲面 S 的边界, 并且曲面 S 的单位法向量 \mathbf{n} 之方向应当这样来选择: 使得立于曲面 S 上的观察者从法线所指方向来看, 围线 C 的环绕是逆时针的 (对于右手坐标系).

5° **有势场** 若向量场 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 是某标量 u 的梯度, 即 $\text{grad} u = \mathbf{a}$, 则 \mathbf{a} 称为有势场, 而标量 u 称为场的势.

若势 u 为单值函数, 则
$$\int_{AB} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = u(B) - u(A).$$

特别地, 这时向量 \mathbf{a} 的环量等于零.

在单连通区域内给定的场 \mathbf{a} 为有势场的充要条件是

$$\text{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0},$$

即这样的场应当是无旋场.

【4401】 求场 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ 在下列各点的梯度的大小和方向:

(1) $O(0, 0, 0)$; (2) $A(1, 1, 1)$; (3) $B(2, 0, 1)$.

在场中怎样的点, 梯度等于零?

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y + 3$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y + x - 2$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 6z - 6$.

(1) 在 O 点, 有 $\text{grad} u = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, $|\text{grad} u| = 7$, 方向:

$$\cos \alpha = \frac{3}{7}, \cos \beta = -\frac{2}{7}, \cos \gamma = -\frac{6}{7};$$

(2) 在 A 点, 有 $\text{grad} u = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $|\text{grad} u| = 3\sqrt{5}$, 方向:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \gamma = 0;$$

(3) 在 B 点, 有 $\text{grad} u = 7\mathbf{i}$, $|\text{grad} u| = 7$, 方向:

$$\cos \alpha = 1, \cos \beta = \cos \gamma = 0.$$

一般地说, 我们有

$$|\text{grad} u| = \sqrt{(2x+y+3)^2 + (4y+x-2)^2 + (6z-6)^2}.$$

要 $|\text{grad} u| = 0$, 只要

$$\begin{cases} 2x+y+3=0, \\ 4y+x-2=0, \\ 6z-6=0. \end{cases}$$

解之, 得 $x = -2, y = 1, z = 1$, 即在点 $(-2, 1, 1)$ 梯度为零.

【4402】 在空间 $Oxyz$ 的哪些点, 场 $u = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz$ 的梯度

(1) 垂直于 Oz 轴; (2) 平行于 Oz 轴; (3) 等于零?

解 $\text{grad} u = (3x^2 - 3yz)\mathbf{i} + (3y^2 - 3xz)\mathbf{j} + (3z^2 - 3xy)\mathbf{k}$.

(1) 要 $\text{grad} u \perp Oz$, 只要 $\text{grad} u \cdot \mathbf{k} = 0$, 即 $3z^2 - 3xy = 0$ 或 $z^2 = xy$. 因此, 在满足 $z^2 = xy$ 的点 (x, y, z) , 其梯度垂直于 Oz 轴.

(2) 要 $\text{grad} u \parallel Oz$, 只要

$$\begin{cases} 3x^2 - 3yz = 0, \\ 3y^2 - 3xz = 0. \end{cases}$$

解之, 得 $x = y = 0$ 及 $x = y = z$. 因此, 在点 $(0, 0, z)$ 及 (x, y, z) (其中 $x = y = z$), 其梯度平行于 Oz 轴.

(3) 要 $|\text{grad} u| = 0$, 只要

$$\begin{cases} 3x^2 - 3yz = 0, \\ 3y^2 - 3xz = 0, \\ 3z^2 - 3xy = 0. \end{cases}$$

解之, 得 $x = y = z$. 因此, 在满足 $x = y = z$ 的点 (x, y, z) , 其梯度等于零.

【4403】 给定标量场
$$u = \ln \frac{1}{r},$$

其中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, 在空间 $Oxyz$ 的哪些点成立等式

$$|\operatorname{grad} u| = 1?$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x-a}{r}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y-b}{r}, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z-c}{r}.$

于是,

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2}[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]} = \frac{1}{r}.$$

要 $|\operatorname{grad} u| = 1$, 只要 $r = 1$, 即在以点 (a, b, c) 为中心, 1 为半径的球面上, 均有

$$\left| \operatorname{grad} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right| = 1.$$

其中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$

【4404】 作标量场

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$$

的等值面. 求通过点 $M(9, 12, 28)$ 的等值面. 在区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ 内 $\max u$ 等于什么?

解 等值面可由

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$$

化简得到. 显然有

$$u \geq \sqrt{(z+8)^2} + \sqrt{(z-8)^2} \geq z+8 \quad (z-8) = 16.$$

于是, 当 $u \geq 16$ 时, 有

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}.$$

平方化简可得

$$u^2 = 32z + 2u \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}.$$

再平方化简, 即得等值面方程 $\frac{1(x^2 + y^2)}{u^2 - 256} + \frac{1z}{u} = 1 \quad (u \geq 16),$

这是绕 Oz 轴旋转的一个旋转面. 图形省略.

当 $x = 9, y = 12, z = 28$ 时, $u = 64$. 因此, 等值面方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{960} + \frac{z}{1024} = 1.$$

在区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ 内, 由于

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 16z + 64} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 16z + 64} \leq \sqrt{100 + 16z} + \sqrt{100 - 16z} \quad (0 \leq z \leq 6),$$

故函数 $f(z) = \sqrt{100 + 16z} + \sqrt{100 - 16z}$ 在 $[0, 6]$ 上的最大值即 u 的最大值.

$$\text{但是, } f'(z) = 8 \left(\frac{1}{\sqrt{100 + 16z}} - \frac{1}{\sqrt{100 - 16z}} \right) < 0 \quad (0 < z \leq 6),$$

故 $f(z)$ 在 $[0, 6]$ 上递减. 从而,

$$\max_{z \in [0, 6]} f(z) = f(0) = 20.$$

因此, 有 $\max u = 20$.

【4405】 求场 $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ 在点 $A(1, 2, 2)$ 及 $B(-3, 1, 0)$ 的梯度之间的夹角 φ .

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$

在点 A, B 的梯度分别为

$$\operatorname{grad} u(A) = \frac{7}{81} \mathbf{i} - \frac{4}{81} \mathbf{j} - \frac{1}{81} \mathbf{k}, \quad \operatorname{grad} u(B) = -\frac{2}{25} \mathbf{i} + \frac{3}{50} \mathbf{j}.$$

于是,

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{grad} u(A) \cdot \operatorname{grad} u(B)}{|\operatorname{grad} u(A)| \cdot |\operatorname{grad} u(B)|} = \frac{-\frac{105}{9 \cdot 10}}{1 \cdot 1} = -\frac{8}{9}.$$

【4406】 设已知标量场 $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 作出场的等值面和梯度的等模面.

求区域 $1 < z < 2$ 内的 $\inf u, \sup u, \inf |\operatorname{grad} u|, \sup |\operatorname{grad} u|$.

解 将 $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 化简整理, 即得 $x^2 + y^2 + \frac{u^2}{1-u^2} z^2 = 0$.

其中显然有 $0 < |u| < 1$. 由此可知, 等值面是一个以原点为顶点, Oz 轴为旋转轴的圆锥, 但要去掉原点 $O(0, 0, 0)$. 因此, 它是一个圆锥孔, 又

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{xz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{yz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}},\end{aligned}$$

故有 $|\text{grad} u| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2}$.

令 $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = c$, 显见此等模面是一个以 Oz 轴为旋转轴的旋转面. 现在令 $y = 0$, 得

$$x = cx^2 + cz^2 \quad \text{或} \quad \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4c^2} \quad (c \neq 0),$$

它是 Oxz 面上的圆. 因此, 梯度的等模面是一个旋转环面.

当 $1 < z < 2$ 时, 显然有 $0 < u \leq 1$; 且当 $x = y = 0$ 时, $u = 1$, 而当 $x^2 + y^2$ 充分大时 u 可任意小, 故

$$\inf_{1 < z < 2} u = 0, \quad \sup_{1 < z < 2} u = 1.$$

此外, 显然

$$\inf_{1 < z < 2} |\text{grad} u| = \inf_{1 < z < 2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$$

由于对于常数 $a > 0$, 函数 $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{t+a}$ ($0 \leq t < +\infty$) 当 $t = a$ 时达最大值 $f(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ (这可从讨论 $f(t)$ 简单

地得知), 故对于固定的 z , $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2}$ 的最大值是 $\frac{1}{2\sqrt{z^2}} = \frac{1}{2z}$ ($z > 0$), 由此可知

$$\sup_{1 < z < 2} |\text{grad} u| = \sup_{1 < z < 2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}.$$

[4407] 精确到高阶无穷小量, 求在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处之无限接近的等值面

$$u(x, y, z) = c \quad \text{及} \quad u(x, y, z) = c + \Delta c$$

之间的距离, 其中 $u(x, y, z) = c$ ($|\text{grad} u(x, y, z)| \neq 0$).

解 过点 M_0 作等值面 $u(x, y, z) = c$ 的垂线, 交等值面 $u(x, y, z) = c + \Delta c$ 于点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 则显然等值面 $u(x, y, z) = c$ 和 $u(x, y, z) = c + \Delta c$ 之间的距离 $d = |\overrightarrow{M_0 M_1}|$. 由于梯度垂直于等值面, 因此, $\overrightarrow{\text{grad} u(x_0, y_0, z_0)}$ 的方向与 $\overrightarrow{M_0 M_1}$ 的方向或者重合, 或者相反. 于是, 注意到 $u(x_0, y_0, z_0) = c$, $u(x_1, y_1, z_1) = c + \Delta c$, 即知

$$\begin{aligned}\Delta c = u(x_1, y_1, z_1) - u(x_0, y_0, z_0) &\approx \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (x_1 - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (y_1 - y_0) + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (z_1 - z_0) \\ &= [\overrightarrow{\text{grad} u(x_0, y_0, z_0)} \cdot \overrightarrow{M_0 M_1}] = |\overrightarrow{\text{grad} u(x_0, y_0, z_0)}| |\overrightarrow{M_0 M_1}| \\ &\approx |\text{grad} u(x_0, y_0, z_0)| d.\end{aligned}$$

由此可知(精确到高阶无穷小), $d \approx \frac{|\Delta c|}{|\text{grad} u(x_0, y_0, z_0)|}$.

[4408] 证明公式:

- (1) $\text{grad}(u+c) = \text{grad} u$ (c 为常数);
- (2) $\text{grad} cu = c \text{grad} u$ (c 为常数);
- (3) $\text{grad}(u+v) = \text{grad} u + \text{grad} v$;
- (4) $\text{grad} uv = v \text{grad} u + u \text{grad} v$;
- (5) $\text{grad}(u^2) = 2u \text{grad} u$;
- (6) $\text{grad} f(u) = f'(u) \text{grad} u$.

提示 利用梯度的定义易证.

证

(1) 由于 $\frac{\partial(u+c)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial(u+c)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial(u+c)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}$, 故得 $\text{grad}(u+c) = \text{gradu}$.

(2) 由于 $\frac{\partial(cu)}{\partial x} = c \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial(cu)}{\partial y} = c \frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial(cu)}{\partial z} = c \frac{\partial u}{\partial z}$, 故得 $\text{grad} cu = c \text{gradu}$.

(3) 由于 $\frac{\partial(u+v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial(u+v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial(u+v)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}$, 故得 $\text{grad}(u+v) = \text{gradu} + \text{grad} v$.

(4) 由于 $\frac{\partial(uv)}{\partial x} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial(uv)}{\partial y} = u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial(uv)}{\partial z} = u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial z}$, 故得 $\text{grad} uv = u \text{grad} v + v \text{grad} u$.

(5) 在(4)中令 $v = u$, 即得 $\text{grad}(u^2) = 2u \text{gradu}$.

(6) 由于 $\frac{\partial f(u)}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial f(u)}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial f(u)}{\partial z} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial z}$, 故得 $\text{grad} f(u) = f'(u) \text{gradu}$.

【4409】 计算: (1) $\text{grad} r$; (2) $\text{grad} r^2$; (3) $\text{grad} \frac{1}{r}$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

解 (1) $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$. 于是, $\text{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r}$, 其中 $\mathbf{r} = xi + yj + zk$.

(2) $\text{grad}(r^2) = 2r \text{grad} r = 2r \frac{\mathbf{r}}{r} = 2\mathbf{r}$.

(3) $\text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \text{grad} r = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

【4410】 求 $\text{grad} f(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

提示 利用 4408 题(6)及 4409 题(1)的结果.

解 $\text{grad} f(r) = f'(r) \text{grad} r = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$.

*) 利用 4408 题(6)的结果.

**) 利用 4409 题(1)的结果.

【4411】 求 $\text{grad}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})$, 其中 \mathbf{c} 为常向量, \mathbf{r} 为引自坐标原点的径向量.

解 设 $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$, 其中 c_x, c_y, c_z 为常数. 由于

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = c_x x + c_y y + c_z z \quad \text{及} \quad \frac{\partial(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}{\partial x} = c_x, \quad \frac{\partial(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}{\partial y} = c_y, \quad \frac{\partial(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}{\partial z} = c_z,$$

故 $\text{grad}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c}$.

【4412】 求 $\text{grad}\{|\mathbf{c} \times \mathbf{r}|^2\}$ (\mathbf{c} 为常向量).

解 $|\mathbf{c} \times \mathbf{r}|^2 = (c_y z - c_z y)^2 + (c_z x - c_x z)^2 + (c_x y - c_y x)^2$. 于是,

$$\begin{aligned} \text{grad}\{|\mathbf{c} \times \mathbf{r}|^2\} &= [2c_z(c_x x - c_x z) - 2c_y(c_x y - c_y x)]\mathbf{i} + [-2c_z(c_y z - c_z y) + 2c_x(c_x y - c_y x)]\mathbf{j} \\ &\quad + [2c_y(c_y z - c_z y) - 2c_x(c_x x - c_x z)]\mathbf{k} \\ &= 2[c_x(c_y^2 + c_z^2) - c_x(c_x x + c_y y + c_z z)]\mathbf{i} + 2[y(c_x^2 + c_z^2) - c_y(c_x x + c_y y + c_z z)]\mathbf{j} \\ &\quad + 2[z(c_x^2 + c_y^2) - c_z(c_x x + c_y y + c_z z)]\mathbf{k} \\ &= 2\mathbf{r}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) - 2\mathbf{c}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}). \end{aligned}$$

【4413】 证明公式: $\text{grad} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad} v$.

证 由于 $\frac{\partial f(u, v)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial f(u, v)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial f(u, v)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z}$,

故有 $\text{grad} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad} v$.

【4414】 证明公式: $\nabla^2(uv) = u \nabla^2 v + v \nabla^2 u + 2 \nabla u \cdot \nabla v$,

其中 $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$, $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

证 由于 $\nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u$, 故

$$\begin{aligned}\nabla^2(uv) &= \nabla[\nabla(uv)] = \nabla(u\nabla v + v\nabla u) = \nabla(u\nabla v) + \nabla(v\nabla u) \\ &= (u\nabla^2 v + \nabla u \nabla v) + (v\nabla^2 u + \nabla v \nabla u) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\nabla u \nabla v.\end{aligned}$$

【4415】 证明:若函数 $u=u(x,y,z)$ 在凸区域 Ω 内可微,且 $|\text{gradu}| \leq M$, 其中 M 为常数,则对于 Ω 中任意两点 A, B 有:

$$|u(A) - u(B)| \leq M\rho(A, B),$$

式中 $\rho(A, B)$ 为 A 与 B 两点之间的距离.

证 由于 Ω 为凸区域,故线段 \overline{AB} 整个属于 Ω . 设 B 的坐标为 (x_0, y_0, z_0) , A 的坐标为 (x_1, y_1, z_1) , 且令 $x_1 = x_0 + \Delta x, y_1 = y_0 + \Delta y, z_1 = z_0 + \Delta z$, 并考虑一元函数 $f(t) = u(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)$ ($0 \leq t \leq 1$), 显然 $f(0) = u(B), f(1) = u(A)$, 且 $f(t)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, 并且

$$\begin{aligned}f'(t) &= u'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta x + u'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta y \\ &\quad + u'_z(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta z.\end{aligned}$$

于是,由微分学中值定理知

$$\begin{aligned}u(A) - u(B) &= f(1) - f(0) = f'(\xi) \\ &= u'_x(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)\Delta x + u'_y(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)\Delta y + \\ &\quad u'_z(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)\Delta z \\ &= [\text{gradu}(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)] \cdot \vec{BA},\end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}|u(A) - u(B)| &= |[\text{gradu}(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)] \cdot \vec{BA}| \\ &\leq |\text{gradu}(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)| \cdot |\vec{BA}| \leq M\rho(A, B).\end{aligned}$$

【4416】 求场 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 在已知点 $M(x, y, z)$ 处沿此点的径向量 r 之方向的导数.

在怎样的情况下,此导数等于梯度的大小?

解 $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma$, 其中 $\cos\alpha = \frac{x}{r}, \cos\beta = \frac{y}{r}, \cos\gamma = \frac{z}{r}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2x}{a^2} \frac{x}{r} + \frac{2y}{b^2} \frac{y}{r} + \frac{2z}{c^2} \frac{z}{r} = \frac{2u}{r}.$$

又 $|\text{gradu}| = 2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$. 要 $|\text{gradu}| = \frac{\partial u}{\partial r}$, 只要 $\frac{u}{r} = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$, 即只要 $a=b=c$, 此即所求的解.

【4417】 求场 $u = \frac{1}{r}$ (其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 在方向 $l \{ \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \}$ 上的导数.

在怎样的情况下,此导数等于零?

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$. 于是,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l} &= -\frac{x}{r^3} \cos\alpha - \frac{y}{r^3} \cos\beta - \frac{z}{r^3} \cos\gamma = -\frac{1}{r^2} [\cos(r, x) \cos\alpha + \cos(r, y) \cos\beta + \cos(r, z) \cos\gamma] \\ &= -\frac{\cos(l, r)}{r^2}.\end{aligned}$$

要 $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, 只要 $\cos(l, r) = 0$, 即 $l \perp r$, 此即所求的解.

【4418】 求场 $u = u(x, y, z)$ 在场 $v = v(x, y, z)$ 的梯度方向的导数.

在怎样的情况下,此导数等于零?

解 $l = \text{grad}v, l_0 = \frac{\text{grad}v}{|\text{grad}v|}$. 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{gradu} \cdot l_0 = \frac{\text{gradu} \cdot \text{grad}v}{|\text{grad}v|}$$

要 $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, 只要 $\text{grad} u \perp \text{grad} v$, 此即所求的解.

【4419】 设 $u = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $c = i + j + k$, 写出 $a = c \times \text{grad} u$ 通过单位向量 i, j, k 的表达式.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2}} \left(-\frac{xz}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

于是,

$$\begin{aligned} a = c \times \text{grad} u &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} [(x^2 + y^2 + yz)i - (x^2 + y^2 + xz)j + (x - y)zk]. \end{aligned}$$

【4420】 确定向量场 $a = xi + yj + 2zk$ 的向量线.

解 向量线系这样的一条曲线 C , 在 C 上每一点的切线与向量场在该点的方向重合. 因此, 有 $dr // a$, 即

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z},$$

其中 $a = a_x i + a_y j + a_z k$.

今有 $a_x = x, a_y = y, a_z = 2z$, 故得 $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}.$

解之, 得 $y = c_1 x, z = c_2 x^2$.

【4421】 用直接计算的方法证明: 向量 a 的散度与直角坐标系的选择无关.

证 设除直角坐标系 $Oxyz$ (坐标轴方向的单位向量为 i, j, k) 外, 另有直角坐标系 $O'x'y'z'$ (坐标轴方向的单位向量为 i', j', k'). 我们要证

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'},$$

设

$$\begin{cases} i' = \cos \alpha_1 i + \cos \beta_1 j + \cos \gamma_1 k, \\ j' = \cos \alpha_2 i + \cos \beta_2 j + \cos \gamma_2 k, \\ k' = \cos \alpha_3 i + \cos \beta_3 j + \cos \gamma_3 k. \end{cases}$$

又设 $r_0 = \overrightarrow{OX} = ai + bj + ck$. 于是, 空间一点 P 在两个坐标系中的坐标 (x, y, z) 与 (x', y', z') 之间的关系为

(令 $r = \overrightarrow{OP}, r' = \overrightarrow{O'P}$);

$$x' - r' \cdot i' = (r - r_0) \cdot i' = (x - a) \cos \alpha_1 + (y - b) \cos \beta_1 + (z - c) \cos \gamma_1,$$

$$y' = r' \cdot j' = (r - r_0) \cdot j' = (x - a) \cos \alpha_2 + (y - b) \cos \beta_2 + (z - c) \cos \gamma_2,$$

$$z' = r' \cdot k' = (r - r_0) \cdot k' = (x - a) \cos \alpha_3 + (y - b) \cos \beta_3 + (z - c) \cos \gamma_3,$$

我们有

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x i' + a_y j' + a_z k' \\ &= a_x (\cos \alpha_1 i + \cos \beta_1 j + \cos \gamma_1 k) + a_y (\cos \alpha_2 i + \cos \beta_2 j + \cos \gamma_2 k) + a_z (\cos \alpha_3 i + \cos \beta_3 j + \cos \gamma_3 k). \end{aligned}$$

由此可知

$$a_x = a_{x'} \cos \alpha_1 + a_{y'} \cos \alpha_2 + a_{z'} \cos \alpha_3 \quad a_y = a_{x'} \cos \beta_1 + a_{y'} \cos \beta_2 + a_{z'} \cos \beta_3 \quad a_z = a_{x'} \cos \gamma_1 + a_{y'} \cos \gamma_2 + a_{z'} \cos \gamma_3.$$

于是,

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} = \left(\cos \alpha_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \cos \alpha_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial x'} + \cos \alpha_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial x'} \right) \cos \alpha_1$$

$$+ \left(\cos \alpha_1 \frac{\partial a_{i'}}{\partial y'} + \cos \alpha_2 \frac{\partial a_{j'}}{\partial y'} + \cos \alpha_3 \frac{\partial a_{k'}}{\partial y'} \right) \cos \alpha_2 + \left(\cos \alpha_1 \frac{\partial a_{i'}}{\partial z'} + \cos \alpha_2 \frac{\partial a_{j'}}{\partial z'} + \cos \alpha_3 \frac{\partial a_{k'}}{\partial z'} \right) \cos \alpha_3.$$

同理, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_x}{\partial y} &= \left(\cos \beta_1 \frac{\partial a_{i'}}{\partial x'} + \cos \beta_2 \frac{\partial a_{j'}}{\partial x'} + \cos \beta_3 \frac{\partial a_{k'}}{\partial x'} \right) \cos \beta_1 + \left(\cos \beta_1 \frac{\partial a_{i'}}{\partial y'} + \cos \beta_2 \frac{\partial a_{j'}}{\partial y'} + \cos \beta_3 \frac{\partial a_{k'}}{\partial y'} \right) \cos \beta_2 \\ &\quad + \left(\cos \beta_1 \frac{\partial a_{i'}}{\partial z'} + \cos \beta_2 \frac{\partial a_{j'}}{\partial z'} + \cos \beta_3 \frac{\partial a_{k'}}{\partial z'} \right) \cos \beta_3, \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} &= \left(\cos \gamma_1 \frac{\partial a_{i'}}{\partial x'} + \cos \gamma_2 \frac{\partial a_{j'}}{\partial x'} + \cos \gamma_3 \frac{\partial a_{k'}}{\partial x'} \right) \cos \gamma_1 + \left(\cos \gamma_1 \frac{\partial a_{i'}}{\partial y'} + \cos \gamma_2 \frac{\partial a_{j'}}{\partial y'} + \cos \gamma_3 \frac{\partial a_{k'}}{\partial y'} \right) \cos \gamma_2 \\ &\quad + \left(\cos \gamma_1 \frac{\partial a_{i'}}{\partial z'} + \cos \gamma_2 \frac{\partial a_{j'}}{\partial z'} + \cos \gamma_3 \frac{\partial a_{k'}}{\partial z'} \right) \cos \gamma_3. \end{aligned}$$

将这三式相加, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_x}{\partial z} &= (i' \cdot i') \frac{\partial a_{i'}}{\partial x'} + (j' \cdot i') \frac{\partial a_{j'}}{\partial x'} + (k' \cdot i') \frac{\partial a_{k'}}{\partial x'} + (i' \cdot j') \frac{\partial a_{i'}}{\partial y'} + (j' \cdot j') \frac{\partial a_{j'}}{\partial y'} + (k' \cdot j') \frac{\partial a_{k'}}{\partial y'} \\ &\quad + (i' \cdot k') \frac{\partial a_{i'}}{\partial z'} + (j' \cdot k') \frac{\partial a_{j'}}{\partial z'} + (k' \cdot k') \frac{\partial a_{k'}}{\partial z'} \\ &= \frac{\partial a_{i'}}{\partial x'} + \frac{\partial a_{j'}}{\partial y'} + \frac{\partial a_{k'}}{\partial z'}. \end{aligned}$$

证毕.

【4422】 证明:

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a}_n dS,$$

其中 S 表示围绕点 M 的封闭曲面, V 是该曲面所围区域的体积, \mathbf{n} 为曲面 S 的外法向量, $d(S)$ 为曲面 S 的直径.

证明思路 注意 $\mathbf{a}_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma$, 并应用奥氏公式及积分中值定理, 命题即可获证.

证 由于

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 \mathbf{n} 的方向余弦. 应用奥氏公式以及积分中值定理, 得

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{a}_n dS &= \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz - \iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{a}) dx dy dz \\ &= \operatorname{div}(\mathbf{M}_1) \cdot V, \end{aligned}$$

其中 M_1 是 V 中某点, 即

$$\operatorname{div}(\mathbf{M}_1) = \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a}_n dS.$$

令 $d(S) \rightarrow 0$, 这时 V 缩向点 M , 从而点 $M_1 \rightarrow M$, 取极限, 即得

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a}_n dS.$$

证毕.

【4423】 求

$$\operatorname{div} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

提示 利用散度的定义, 易得结果为零.

$$\begin{aligned} \text{解 } \operatorname{div} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} &= \operatorname{div} \left[\left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

【4424】 证明:

(1) $\operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b}$; (2) $\operatorname{div}(u\mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \operatorname{grad} u$ (\mathbf{c} 为常量, u 为标量);

(3) $\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} u$.

提示 利用散度的定义易证.

证 (1) 设 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$.

由于 $\frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial b_x}{\partial x}$, $\frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial b_y}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{\partial b_z}{\partial z}$, 故得 $\operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b}$.

(2) 设 $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$, 其中 c_x, c_y, c_z 为常数.

由于 $\frac{\partial(uc_x)}{\partial x} = c_x \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial(uc_y)}{\partial y} = c_y \frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial(uc_z)}{\partial z} = c_z \frac{\partial u}{\partial z}$, 故得 $\operatorname{div}(u\mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \operatorname{grad} u$.

(3) 由于 $\frac{\partial(ua_x)}{\partial x} = u \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_x \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial(uc_y)}{\partial y} = u \frac{\partial a_y}{\partial y} + a_y \frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial(ua_z)}{\partial z} = u \frac{\partial a_z}{\partial z} + a_z \frac{\partial u}{\partial z}$, 故得 $\operatorname{div}(u\mathbf{a}) =$

$u \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} u$.

【4425】 求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

提示 利用梯度及散度的结果, 易得结果为 Δu (或记成 $\nabla^2 u$).

解 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$ (或记成 $\nabla^2 u$).

【4426】 求 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 在怎样的情况下 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = 0$?

提示 利用 4410 题的结果.

解 由 4410 题的结果知, $\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$.

于是,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[f'(r) \frac{x}{r} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[f'(r) \frac{y}{r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[f'(r) \frac{z}{r} \right] \\ &= f''(r) \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} \right) + f'(r) \left(\frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} \right) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r). \end{aligned}$$

要 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = 0$, 只要 $f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0$. 将上述方程写成下述形式:

$$rf''(r) + 2f'(r) = 0. \quad \text{或} \quad [rf''(r) + f'(r)] + f'(r) = 0.$$

积分之, 即得

$$rf'(r) + f(r) = C \quad (C \text{ 为常数}).$$

再积分之, 得

$$rf(r) = Cr + C_1 \quad (C_1 \text{ 为常数}).$$

于是, 最后得

$$f(r) = C + \frac{C_1}{r},$$

此即所求的解.

【4427】 计算: (1) $\operatorname{div} \mathbf{r}$; (2) $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r}$.

提示 利用散度定义, 易得结果: (1) 3; (2) $\frac{2}{r}$.

解 (1) $\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$.

$$\begin{aligned} (2) \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r} \right) = \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right) \\ &= \frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

【4428】 计算 $\operatorname{div}[f(\mathbf{r})\mathbf{c}]$, 式中 \mathbf{c} 为常向量.

提示 利用 4424 题(2)及 4410 题的结果.

解 $\operatorname{div}[f(\mathbf{r})\mathbf{c}] = \mathbf{c} \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = \mathbf{c} \cdot f'(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{f'(\mathbf{r})}{r} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})$

*) 利用 4424 题(2)的结果.

* *) 利用 4410 题的结果

【4429】 求 $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}]$. 在怎样的情况下该散度等于零?

提示 利用 4424 题(3)及 4410 题的结果.

解 $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}] = f(r)\operatorname{div}\mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \operatorname{grad}f(r) = 3f(r) + \mathbf{r} \cdot f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = 3f(r) + rf'(r)$.

要 $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}] = 0$, 只要 $3f(r) + rf'(r) = 0$, 即 $\frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{3}{r}$. 积分之, 即得

$$f(r) = \frac{C}{r^3} \quad (C \text{ 为常数}),$$

此即所求的解.

*) 利用 4424 题(3)的结果.

* *) 利用 4410 题的结果

【4430】 求: (1) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u)$; (2) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)$.

提示 利用 4424 题(3)及 4425 题的结果.

解 (1) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u) = u\operatorname{div}(\operatorname{grad}u) + \operatorname{grad}u \cdot \operatorname{grad}u = u\Delta u + (\operatorname{grad}u)^2$

(2) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v) = u\operatorname{div}(\operatorname{grad}v) + \operatorname{grad}v \cdot \operatorname{grad}u = u\Delta v + \operatorname{grad}u \cdot \operatorname{grad}v$.

*) 利用 4424 题(3)的结果.

* *) 利用 4425 题的结果

【4431】 设流体充满空间并以恒定的角速度 ω 依逆时针方向绕 Oz 轴旋转. 求速度向量 \mathbf{v} 和加速度向量 \mathbf{w} 在已知时刻在空间点 $M(x, y, z)$ 处的散度.

解 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r}$. 微分之, 即得

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times (\mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r}) \\ &= \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v}_0 + (\omega \cdot \mathbf{r})\omega - (\omega \cdot \omega)\mathbf{r}.\end{aligned}$$

为了计算 $\operatorname{div}\mathbf{v}$ 和 $\operatorname{div}\mathbf{w}$, 先计算 $\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$, 此处 \mathbf{a} 为常向量. 由于

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{r})_x = a_y z - a_z y, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{r})_y = a_z x - a_x z, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{r})_z = a_x y - a_y x.$$

故得 $\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(a_y z - a_z y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_z x - a_x z) + \frac{\partial}{\partial z}(a_x y - a_y x) = 0$.

于是, 即得

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{v}_0 + \operatorname{div}(\omega \times \mathbf{r}) = 0.$$

$$\operatorname{div}\mathbf{w} = \operatorname{div}\dot{\mathbf{v}}_0 + \operatorname{div}(\dot{\omega} \times \mathbf{r}) + \operatorname{div}(\omega \times \mathbf{v}_0) + \operatorname{div}[(\omega \cdot \mathbf{r})\omega] - \operatorname{div}[(\omega \cdot \omega)\mathbf{r}],$$

而

$$\operatorname{div}[(\omega \cdot \mathbf{r})\omega] = \omega \cdot \mathbf{r} \operatorname{div}\omega + \omega \cdot \operatorname{grad}(\omega \cdot \mathbf{r}) = \omega \cdot \omega = \omega^2$$

及

$$\operatorname{div}[(\omega \cdot \omega)\mathbf{r}] = \omega \cdot \omega \operatorname{div}\mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \operatorname{grad}(\omega \cdot \omega) = 3\omega^2,$$

从而, 最后得 $\operatorname{div}\mathbf{w} = \omega^2 - 3\omega^2 = -2\omega^2$.

*) 利用向量代数中的公式(二重外积展开式)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

* *) 利用 4424 题(3)的结果

* * *) 利用 4411 题的结果.

【4432】 求包含多个引力中心的有限系统所产生的引力场之散度.

解 引力 $\mathbf{F} = -\frac{k\mathbf{r}}{r^3}$ (k 为常数). 于是,

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{kx}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{ky}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{kz}{r^3}\right) = k\left[\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}\right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}\right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}\right)\right]$$

$$-k\left[\frac{3}{r^3}-\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r}\right]=-k\left(\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^3}\right)=0.$$

【4433】 求由极坐标 r 与 φ 表示的平面向量 $\mathbf{a}=\mathbf{a}(r,\varphi)$ 之散度的表示式.

解 设极坐标的 r 线与 φ 线的单位向量为 \mathbf{e}_r 与 \mathbf{e}_φ , 且

$$\mathbf{a}(r,\varphi)=a_r(r,\varphi)\mathbf{e}_r+a_\varphi(r,\varphi)\mathbf{e}_\varphi.$$

这里自然假定 a_r, a_φ 都具有连续的偏导数. 取面积元素 $\Delta S=r\Delta\varphi\Delta r$, 记其围线为 ΔC . 首先, 推导向量 \mathbf{a} 经过围线 ΔC 的通量, 即矢流. 通量可分两部分: 一部分是经过 r 线的; 另一部分是经过 φ 线的. 它们分别是

$$\begin{aligned}& \int_r^{r+\Delta r} a_\varphi(r,\varphi+\Delta\varphi)dr - \int_r^{r+\Delta r} a_\varphi(r,\varphi)dr = \int_r^{r+\Delta r} [a_\varphi(r,\varphi+\Delta\varphi) - a_\varphi(r,\varphi)]dr \\&= \int_r^{r+\Delta r} \frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial \varphi} \Delta\varphi dr = \frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial \varphi} \Delta\varphi \Delta r, \\& \int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} a_r(r+\Delta r,\varphi)(r+\Delta r)d\varphi - \int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} a_r(r,\varphi)r d\varphi = \int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} [a_r(r+\Delta r,\varphi)(r+\Delta r) - a_r(r,\varphi)r]d\varphi \\&\approx \int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} \frac{\partial [a_r(r,\varphi)r]}{\partial r} \Delta r d\varphi \approx \frac{\partial [a_r(r,\varphi)r]}{\partial r} \Delta r \Delta\varphi.\end{aligned}$$

且由于 a_r, a_φ 的偏导数的连续性, 当 $\Delta r, \Delta\varphi$ 取得愈小时, 上述近似等式愈精确. 于是, 向量 \mathbf{a} 经过 ΔC 的通量为

$$\oint_{\Delta C} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} ds \approx \left\{ \frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial [a_r(r,\varphi)r]}{\partial r} \right\} \Delta\varphi \Delta r,$$

其中 \mathbf{n} 为曲线 ΔC 的外法向量, 而且当 $\Delta r, \Delta\varphi$ 愈小时此近似等式愈精确.

于是, 根据散度的定义, 并注意到 ΔS 收缩为一点 (r,φ) 与 $\Delta r \rightarrow 0, \Delta\varphi \rightarrow 0$ 等价. 从而, 即得

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{a} &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta C} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} ds}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\left\{ \frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial [a_r(r,\varphi)r]}{\partial r} \right\} \Delta r \Delta\varphi}{r \Delta r \Delta\varphi} \\&= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial [a_r(r,\varphi)r]}{\partial r} \right\} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (ra_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right].\end{aligned}$$

【4434】 设 $x=f(u,v,w), y=g(u,v,w), z=h(u,v,w)$,

用正交曲线坐标 u, v, w 表示 $\operatorname{div} \mathbf{a}(x, y, z)$. 作为特殊的情形, 求用柱坐标和球坐标表示 $\operatorname{div} \mathbf{a}$ 的表示式.

提示 研究向量 \mathbf{a} 通过以曲面 $u=\text{常数}, v=\text{常数}, w=\text{常数}$ 为界的小立体 (接近于长方体) V 的表面 S 的通量.

解 考虑向量 \mathbf{a} 通过由曲面 $u=\text{常数}, v=\text{常数}, w=\text{常数}$ 所界的小立体 (接近于长方体) V 的表面 S 的通量 (图 8.72), 我们有 $\mathbf{a}=a_u\mathbf{e}_1+a_v\mathbf{e}_2+a_w\mathbf{e}_3$. 在 u 曲线上, 只有 u 变化 (v 和 w 都是常数), 故

$$d\mathbf{r}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw,$$

从而, $ds_1=|d\mathbf{r}|=Ldu$, 其中

$$L=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2},$$

ds_1 为 u 曲线上的弧元素. 同理可得 $ds_2=Mdv, ds_3=Ndw$,

其中 ds_2, ds_3 分别为 v, w 曲线上的弧元素, 而

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}, \quad N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}.$$

由于坐标曲线互相垂直, $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3$ 都很小, 故 V 接近于长方体. 因此, 其体积为

$$V \approx \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 \approx ds_1 ds_2 ds_3 = LMN du dv dw.$$

现计算 \mathbf{a} 通过 V 的表面 S 向外的通量 $\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS$, S 共包括六块小曲面 (图 8.72), 记垂直于 \mathbf{e}_1 方向的两块

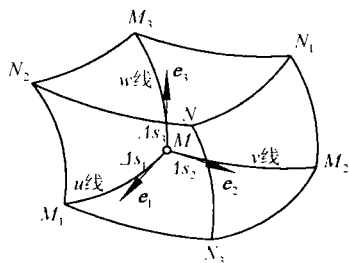


图 8.72

为 S_1 与 S_2 (即图中的 $MM_1N_1M_3$ 与 $M_1N_1NN_2$), 垂直于 e_2 方向的两块为 S_3 与 S_4 , 垂直于 e_3 方向的两块为 S_5 与 S_6 . 显然, 由于曲面很小, 有

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} a_n dS + \iint_{S_1} a_n dS &\approx a_u \Delta S_2 \Delta S_1 \Big|_{(u, \Delta u, v, w)} - a_u \Delta S_2 \Delta S_3 \Big|_{(u, v, w)} \\ &\approx a_u MN dv dw \Big|_{(u, \Delta u, v, w)} - a_u MN dv dw \Big|_{(u, v, w)} \approx \frac{\partial(a_u MN dv dw)}{\partial u} du - \frac{\partial(MN a_u)}{\partial u} du dv dw. \end{aligned}$$

同理可得

$$\iint_{S_1} a_n dS + \iint_{S_3} a_n dS \approx \frac{\partial(NL a_v)}{\partial v} du dv dw, \quad \iint_{S_6} a_n dS + \iint_{S_5} a_n dS \approx \frac{\partial(LM a_w)}{\partial w} du dv dw.$$

相加即得

$$\iint_S a_n dS \approx \left[\frac{\partial(MN a_u)}{\partial u} + \frac{\partial(NL a_v)}{\partial v} + \frac{\partial(LM a_w)}{\partial w} \right] du dv dw.$$

$$\text{于是,} \quad \frac{\iint_S a_n dS}{V} \approx \frac{1}{LMN} \left[\frac{\partial}{\partial u} (MN a_u) + \frac{\partial}{\partial v} (NL a_v) + \frac{\partial}{\partial w} (LM a_w) \right].$$

显然, 当小立体 V 愈缩向点 $M(V$ 愈小时), 上述各近似等式都愈精确. 于是, 令 V 缩向 M (即 S 的直径 $d(S)$ 趋于零) 取极限, 利用 4422 题的结果, 得

$$\operatorname{div} a = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{\iint_S a_n dS}{V} = \frac{1}{LMN} \left[\frac{\partial}{\partial u} (MN a_u) + \frac{\partial}{\partial v} (NL a_v) + \frac{\partial}{\partial w} (LM a_w) \right].$$

特别是在柱坐标情形下, 有 $x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z \quad (u = r, v = \varphi, w = z)$.

从而,

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1, & M &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r, \\ N &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1. \end{aligned}$$

于是,

$$\operatorname{div} a = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial a_z}{\partial z} \right].$$

在球坐标情形下, 有

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (u = r, v = \theta, w = \varphi).$$

$$\text{从而,} \quad L = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1, \quad M = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = r,$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r \sin \theta.$$

于是,

$$\operatorname{div} a = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (a_r r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (a_\varphi r) \right] = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (a_r r^2) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right].$$

[4435] 证明:

$$(1) \operatorname{rot}(a+b) = \operatorname{rot} a + \operatorname{rot} b; \quad (2) \operatorname{rot}(ua) = u \operatorname{rot} a + \operatorname{grad} u \times a.$$

提示 利用旋度的定义易证.

证 (1) 设 $a = a_x i + a_y j + a_z k, \quad b = b_x i + b_y j + b_z k$, 则有

$$\operatorname{rot}(a+b) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x+b_x & a_y+b_y & a_z+b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot} a + \operatorname{rot} b.$$

$$(2) \operatorname{rot}_r(ua) = \frac{\partial}{\partial y} (ua_x) - \frac{\partial}{\partial z} (ua_y) - u \left(\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \left(a_x \frac{\partial u}{\partial y} - a_y \frac{\partial u}{\partial z} \right) = u \operatorname{rot}_r a + (\operatorname{grad} u \times a),$$

同法可得

$$\operatorname{rot}_y(ua) = u \operatorname{rot}_y a + (\operatorname{grad} u \times a)_y, \quad \operatorname{rot}_z(ua) = u \operatorname{rot}_z a + (\operatorname{grad} u \times a)_z$$

于是, $\operatorname{rot}(ua) = u \operatorname{rot} a + \operatorname{grad} u \times a$.

【4436】 求: (1) $\operatorname{rot} r$; (2) $\operatorname{rot}[f(r)r]$.

提示 (2) 利用 4435 题(2)及 4410 题的结果.

解 (1) $\operatorname{rot} r = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) k = 0$.

(2) $\operatorname{rot}[f(r)r] = f(r) \operatorname{rot} r + \operatorname{grad} f(r) \times r = 0 + f'(r) \frac{r}{r} \times r = 0$.

*) 利用 4435 题(2)的结果.

**) 利用 4410 题的结果

【4437】 求: (1) $\operatorname{rot}[cf(r)]$; (2) $\operatorname{rot}[c \times f(r)r]$ (c 为常向量).

解 (1) $\operatorname{rot}[cf(r)] = f(r) \operatorname{rot} c + \operatorname{grad} f(r) \times c = \frac{f'(r)}{r} (r \times c)$.

(2) $\operatorname{rot}[c \times f(r)r] = f(r) \operatorname{rot}(c \times r) + \operatorname{grad} f(r) \times (c \times r)$.

但是,
$$\operatorname{rot}(c \times r) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ c_y z - c_z y & c_z x - c_x z & c_x y - c_y x \end{vmatrix} = 2c,$$

$$\operatorname{grad} f(r) \times (c \times r) = \frac{f'(r)}{r} r \times (c \times r) = \frac{f'(r)}{r} [(r \cdot r)c - (r \cdot c)r],$$

故最后得
$$\operatorname{rot}[c \times f(r)r] = 2f(r)c + \frac{f'(r)}{r} [(r \cdot r)c - (r \cdot c)r].$$

【4438】 证明: $\operatorname{div}(a \times b) = b \cdot \operatorname{rot} a - a \cdot \operatorname{rot} b$.

提示 利用散度及旋度的定义易证.

证
$$\begin{aligned} \operatorname{div}(a \times b) &= \frac{\partial}{\partial x}(a_y b_z - a_z b_y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_z b_x - a_x b_z) + \frac{\partial}{\partial z}(a_x b_y - a_y b_x) \\ &= b_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + b_y \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + b_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \\ &\quad - a_x \left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) - a_y \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) - a_z \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) \\ &= b \cdot \operatorname{rot} a - a \cdot \operatorname{rot} b. \end{aligned}$$

【4439】 求: (1) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$; (2) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} a)$.

解 (1) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$.

(2) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} a) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = 0$.

【4440】 设流体充满空间并以恒定的角速度 ω 围绕轴 $l \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$ 旋转. 求速度向量 v 在已知时刻在空间点 $M(x, y, z)$ 处的旋度.

解 $v = v_0 + \omega \times r$, 从而有

$$v_x = v_{0x} + \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = v_{0y} + \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = v_{0z} + \omega_x y - \omega_y x,$$

由于 $\operatorname{rot}_x v = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2\omega_x$, $\operatorname{rot}_y v = 2\omega_y$ 及 $\operatorname{rot}_z v = 2\omega_z$, 故 $\operatorname{rot} v = 2\omega$.

【4441】 求径向量 r 的通量: (1) 通过圆锥体 $x^2 + y^2 \leq z^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的侧表面; (2) 穿过此圆锥体的底面.

解 (1)在侧面上,点的向径的方向与圆锥的母线重合.因此,点的向径与圆锥在该点的法线互相垂直,即 \mathbf{r} 在法线方向上的投影 $r_n=0$. 于是,向量 \mathbf{r} 通过侧面 D 的通量为

$$\iint_D r_n dS = 0.$$

(2)在圆锥体的底面上, $r_n=h$ 于是,所求的通量为

$$\iint_{x^2+y^2 \leq h^2} r_n dS = h \cdot \pi h^2 = \pi h^3.$$

【4442】 求向量 $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ 的通量:(1)通过圆柱体 $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的侧面;(2)通过此圆柱的全表面.

解 先求(2).由于 $\iint_S a_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \iiint_V 0 dV = 0$,

故向量 \mathbf{a} 通过圆柱的全表面的通量为零.

再求(1),又由于 $S = S_{\text{侧}} + S_{\text{上}} + S_{\text{下底}}$ 及在上、下底上 $a_n = xy$,故有

$$\iint_{S_{\text{上}} + S_{\text{下底}}} a_n dS = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} xy dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 \sin\varphi \cos\varphi dr = 0.$$

于是, $\iint_{S_{\text{侧}}} a_n dS = 0$, 即向量 \mathbf{a} 通过侧面的通量也为零.

【4443】 求径向量 \mathbf{r} 通过曲面 $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的通量.

解 设 S 为所给的曲面(锥), D 为锥的底面(即 Oxy 平面上的圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$). 由于

$$\iint_S r_n dS + \iint_D r_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{r} dV = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^1 dz = \pi$$

及在 D 上, $\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$, 故 $r_n = 0$, $\iint_D r_n dS = 0$, 从而,得 $\iint_S r_n dS = \pi$.

【4444】 求向量 $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ 通过正八分之一球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的通量.

解 设 S 为所给的曲面, S_1, S_2 及 S_3 为球内三个坐标平面上的部分, 则有

$$\begin{aligned} \iint_S a_n dS + \iint_{S_1} a_n dS + \iint_{S_2} a_n dS + \iint_{S_3} a_n dS &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0} \operatorname{div} \mathbf{a} dV = 2 \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0} (x+y+z) dx dy dz \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^2 \cos\psi \cdot r (\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \cos\psi + \sin\psi) dr \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos\psi \sin\psi + \cos^2\psi (\cos\varphi + \sin\varphi)] d\psi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} (\cos\varphi + \sin\varphi) \right] d\varphi = \frac{3}{8} \pi. \end{aligned}$$

但在 S_i ($i=1, 2, 3$) 上, 显然有 $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$, 故 $a_n = 0$. 从而,

$$\iint_{S_i} a_n dS = 0 \quad (i=1, 2, 3).$$

于是,所求的通量为 $\iint_S a_n dS = \frac{3}{8} \pi$.

【4445】 求向量 $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ 通过以平面

$$x=0, y=0, z=0, x+y+z=a \quad (a>0)$$

为界的角锥的全表面的通量. 利用奥斯特罗格拉茨基公式验证结果.

解 解法 1:

由于 $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$, 故所求的通量为 $\iint_S a_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = 0$.

解法 2:

如图 8.73 所示. 在平面 $z=0$ (S_1) 上, $\mathbf{n} = \{0, 0, -1\}$; 在平面 $y=0$ (S_2) 上, $\mathbf{n} = \{0, -1, 0\}$; 在平面 $x=0$ (S_3) 上, $\mathbf{n} = \{-1, 0, 0\}$. 于是,

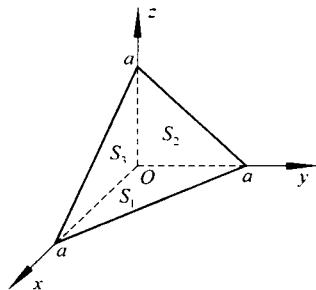


图 8.73

向量 \mathbf{a} 通过曲面 S_1 的通量为

$$\iint_{S_1} a_n dS = \iint_{S_1} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\substack{x+y+z=a \\ x>0, y>0, z>0}} (-x) dx dy = -\frac{a^3}{6}.$$

同法可求得向量 \mathbf{a} 通过 S_2 及 S_3 面的通量也为 $-\frac{a^3}{6}$.

对于平面 $x+y+z=a$ (S_1), 其法向量为 $\mathbf{n} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$, 故通量为

$$\iint_{S_1} a_n dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{S_1} (y+z+x) dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\substack{x+y+z=a \\ x>0, y>0, z>0}} a \sqrt{1^2+1^2+1^2} dx dy = \frac{a^3}{2}.$$

因此, 最后得向量 \mathbf{a} 通过角锥全表面的通量为

$$\sum_{i=1}^4 \iint_{S_i} a_n dS = \frac{a^3}{2} + 3 \left(-\frac{a^3}{6} \right) = 0.$$

【4446】 证明: 向量 \mathbf{a} 通过由方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ($(u, v) \in \Omega$) 给出的曲面 S 的通量等于

$$\iint_S \mathbf{a}_n dS = \iint_{\Omega} \left(\mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv.$$

式中 $\mathbf{a}_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$, \mathbf{n} 为曲面 S 的单位法向量.

证 设曲面 S 的方程为 $\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$,

则有 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$.

从而,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \mathbf{k}.$$

因此, 易得

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{EG - F^2}$$

又 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ 的方向显然是法向量 \mathbf{n} 的方向. 于是, 我们有

$$\iint_S \mathbf{a}_n dS = \iint_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \sqrt{EG - F^2} \mathbf{n} du dv = \iint_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv = \iint_{\Omega} \left(\mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv.$$

【4447】 求向量 $\mathbf{a} = m \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ (m 为常数) 通过围绕坐标原点的封闭曲面 S 的通量.

提示 利用 4392 题(2)的结果.

解 所求的通量为 $\iint_S a_n dS = m \iint_S \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS = m \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = m \cdot 4\pi = 4\pi m$.

*) 利用 4392 题(2)的结果.

【4448】 已知向量 $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \text{grad} \left(-\frac{e_i}{4\pi r_i} \right)$,

其中 e_i 为常数, r_i 为点 M_i (点源) 距动点 $M(\mathbf{r})$ 的距离. 求此向量通过围绕点 M_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的封闭曲面 S 的通量.

解 首先, 我们有 $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \text{grad} \left(-\frac{e_i}{4\pi r_i} \right) = -\sum_{i=1}^n \frac{e_i \mathbf{r}_i}{4\pi r_i^3}$.

其次, 我们考虑这样一个空间区域 V , 它由曲面 S 及包围点 M_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的 n 个小球所围成 (这些小球的球心在点 M_i , 半径为 ρ_i). 由于 $\text{div} \mathbf{a}$ 在 V 内为零, 故

$$\iint_S \mathbf{a}_n dS = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \mathbf{a}_n dS,$$

其中 S_j 为第 j 个小球面, 但是
$$\iint_{S_j} a_n dS = \iint_{S_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{e_i r_i}{4\pi r_i^3} \right) \cdot n dS.$$

由于
$$\iint_{S_j} \frac{1}{r_i^3} (r_i \cdot n) dS = \iint_{S_j} \frac{\cos(r_i, n)}{r_i^3} dS = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 4\pi, & j = i, \end{cases}$$

故得 $\iint_{S_j} a_n dS = e_j$, 从而, $\iint_S a_n dS = \sum_{j=1}^n e_j$.

*) 利用 4392 题的结果.

【4449】 证明:

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \nabla^2 u dx dy dz,$$

其中曲面 S 是区域 V 的边界.

证 参看 4393 题(1).

【4450】 在温度场 u 内, 在单位时间内通过面微元 dS 的热量等于:

$$dQ = k n \cdot \text{grad} u dS,$$

其中 k 为导热率, n 为曲面 S 的单位法向量. 求在单位时间内物体 V 所吸收的热量. 研究温度上升的速度, 从而推出物体温度所满足的方程(热传导方程).

解 由于

$$dQ = -k n \cdot \text{grad} u dS = -k \text{grad}_n u dS,$$

故由奥式公式, 即得

$$Q = - \iint_S k \text{grad}_n u dS = \iiint_V k \text{div}(\text{grad} u) dV.$$

因此, 每单位时间内向物体内部流入的热量为

$$\iiint_V \text{div}(k \text{grad} u) dV. \quad (1)$$

这一热量引起物体内部温度的增加, 现在我们从另一方面再来计算此热量. 在时间 dt 内温度 u 增加

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

需要对体积元素 dV 输入热量

$$c du \rho dV = c \frac{\partial u}{\partial t} \rho dt dV,$$

其中 c 为物体在所考察的点处的热容量. 于是, 在时间 dt 内整个物体就要吸收热量

$$dt \iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV,$$

而在每单位时间内所吸收的热量即为

$$\iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV. \quad (2)$$

比较(1)式及(2)式, 即得等式 $\iiint_V \left\{ c \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(k \text{grad} u) \right\} dV = 0.$

由于上式对取在所考察域内的任何物体 V 都适合, 且被积函数显见连续, 故根据 4097 题的结果, 当点属于所考察的境域时, 恒有

$$c \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k \text{grad} u),$$

此即所求的热传导方程.

【4451】 处于运动状态的不可压缩流体充满区域 V . 假定在区域内没有源泉和漏孔, 试推出连续性方程.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0,$$

式中 $\rho = \rho(x, y, z, t)$ 为流体密度, v 为速度向量, t 为时间.

提示 研究流体通过包含在 V 中的任一区域 V' 的表面 S' 的流量.

解 首先, 我们已知: 在每单位时间内自 V 中的任一区域 V' 的表面 S' 向外流出的流量 Q 为

$$Q = \iint_{S'} \rho v_n dS = \iiint_{V'} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV. \quad (1)$$

现在我们用另一法来计算 Q , 如考虑到在时间 dt 内密度 ρ 增加 $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$, 则立体元素 dV 的质量就增加 $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dV$, 而整个所考察的区域 V' 的质量就增加

$$dt \iiint_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

因此, 每单位时间内 V' 中质量减少

$$\iiint_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

由于 V 内无源泉和漏孔, 故这个减少的质量正好就是从 V' 的表面 S' 流出的流量 Q , 即

$$Q = - \iiint_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (2)$$

比较(1)式和(2)式, 即得等式 $\iiint_{V'} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0$.

由于上式对 V 中任一区域 V' 均成立, 且被积函数连续, 故根据 4097 题的结果, 当 $(x, y, z) \in V$ 时, 恒有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

【4452】 求向量 $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ 沿着一段螺旋线

$$\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的环量.

解 由于 $d\mathbf{r} = (-a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + b \mathbf{k}) dt$, $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = b^2 t dt$, 故所求的环量为

$$W = \int_0^{2\pi} b^2 t dt = 2\pi^2 b^2.$$

【4453】 求向量 $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$ (其中 f 是连续函数) 沿着弧 AB 的环量.

解 所求的环量为 $W = \int_{r_A}^{r_B} f(r)\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_A}^{r_B} f(r)\mathbf{r} \cdot \mathbf{t}^0 ds = \int_{r_A}^{r_B} f(r)r dr$,

其中 \mathbf{t}_0 是单位切向量.

【4454】 求向量 $\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ (c 为常数) 的环量:

(1) 沿着圆周 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$; (2) 沿着圆周 $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$.

解 (1) 圆 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ 的径向量 \mathbf{r} 适合方程

$$\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

由于 $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = (-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + c \mathbf{k}) \cdot (-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}) dt = dt$,

故所求的环量为 $\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$.

(2) 对于圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$, 有

$$\mathbf{r} = (2 + \cos t)\mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

由于 $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = (2 \cos t + 1) dt$, 故所求的环量为 $\int_0^{2\pi} (2 \cos t + 1) dt = 2\pi$.

【4455】 求向量 $\mathbf{a} = \operatorname{grad}(\arctan \frac{y}{x})$ 沿着围线 C 的环量 Γ :

(1) C 不围绕 Oz 轴; (2) C 围绕 Oz 轴.

解 我们有

$$\mathbf{a} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}.$$

于是, 易知 $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0}$ (除 $x = y = 0$, 即 Oz 轴上的点).

(1) 若 C 不围绕 Oz 轴, 则可在 C 上张一曲面 S , 使 S 与 Oz 轴不相交, 于是, 根据斯托克斯公式, 得

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} - \iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{a} dS = 0.$$

(2) 若 C 围绕 Oz 轴. 先设 C 正好围绕 Oz 轴旋转一周, 取常数 $\tau > 0$ 充分小, 使 C 位于平面 $z = \tau$ 的上方. 在平面 $z = \tau$ 上围绕 Oz 轴取一圆周 $C_r (x^2 + y^2 = r^2, z = \tau)$ 充分小, 使半径 r 小于 C 到 Oz 轴的距离. 以 C 与 C_r 为边界张上一曲面 S , 使 S 与 Oz 轴不相交. 由斯托克斯公式, 得

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_r} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} - \iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{a} dS = 0,$$

其中 $-C_r$ 表示沿顺时针方向取向. 于是,

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_r} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}.$$

但取 C_r 的参数方程 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = \tau$ 后, 得

$$\oint_{C_r} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left[\left(-\frac{r \sin \theta}{r^2} \right) (-r \sin \theta) + \left(\frac{r \cos \theta}{r^2} \right) (r \cos \theta) \right] d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

从而, $\Gamma = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$.

现设 C 围绕 Oz 轴旋转了 n 圈. 为叙述简单起见, 假定 $n = 2$. 在平面 Ozx 上引辅助线 (直线段) AB , 将 C 分解成两个只绕 Oz 轴旋转一周的闭曲线

$$C_1 = ABMA \quad \text{与} \quad C_2 = ANBA$$

(图 8.74). 根据前面已证的结果可知

$$\oint_{C_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi, \quad \oint_{C_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

于是, 注意到 \overline{AB} 的曲线积分 (第二型) 与 \overline{BA} 上的曲线积分相消, 即得

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 4\pi.$$

完全类似地, 可得一般情况 (C 围绕 Oz 轴旋转 n 圈) 时, 有

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi n.$$

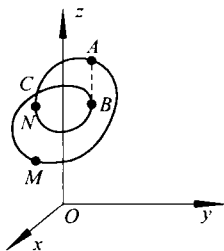


图 8.74

【4456】 平面的不可压缩定常流由速度向量

$$\mathbf{w} = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}$$

描述, 试确定: (1) 经过区域 S 的边界 (封闭围线) C 流出的流体的量 Q (流量); (2) 速度向量沿着围线 C 的环量 Γ . 若流场无源泉、无漏孔且无旋度, 则函数 u 和 v 满足怎样的方程?

解 (1) 考虑包含着点 $D(x, y)$ 的两边长分别为 Δx 与 Δy 的小矩形元 $ABCD$ (图 8.75).

在单位时间内沿 Ox 轴方向从 AD 边流入的量为 $u(x, y)\Delta y$ (为简单起见, 设密度 $\rho = 1$), 而同时从 BC 边流出的量为 $u(x + \Delta x, y)\Delta y$. 于是, 在单位时间内, 沿 Ox 轴方向从单位面积的小正方形内流出的量为

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x \Delta y} \Delta y.$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 此比值的极限 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 就是在点 (x, y) 沿 Ox 轴方向的发散强度.

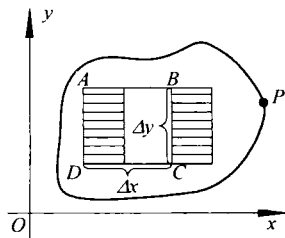


图 8.75

类似地, $\frac{\partial v}{\partial y}$ 就是在点 (x, y) 沿 Oy 轴方向的发散强度. 于是, 在点 (x, y) 处流体的发散强度为 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$, 而对于面积元 $dxdy$ 的流量即为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.$$

因此, 总的流量为

$$Q = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.$$

另一解法:令点 P 为围线 C 上的任一点, \mathbf{n} 为向外法向量, 考虑曲线元素 ds , 单位时间内通过 ds 弧段的流量为

$$dQ = w_n ds,$$

其中 w_n 为点 P 处的流速 \mathbf{w} 在法向量 \mathbf{n} 上的投影: $w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$. 于是, 所求的通过曲线 C 的流量为

$$Q = \int_C w_n ds.$$

但是, $w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = u \cos(\mathbf{n}, x) + v \cos(\mathbf{n}, y) = u \frac{dy}{ds} - v \frac{dx}{ds}$, 故得

$$Q = \int_C u dy - v dx.$$

应用格林公式, 即得

$$Q = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

(2) $d\Gamma = \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = u dx + v dy$, 故

$$\Gamma = \int_C u dx + v dy = \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

若流场无源泉、无漏孔及无旋度, 则对于流场中任何围线 C 及其所包围的区域 S , 均有

$$Q = 0 \quad \text{及} \quad \Gamma = 0.$$

于是, 在流场中的每一点, 均有

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{及} \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{及} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

这就是 u, v 所应满足的方程.

*) 作者注: 从原书答案来看, 本题叙述有误. 最后的问题中“流体是不可压缩”应改为“流场无源泉、无漏孔”, 而在题目开始, 应假定流体不可压缩.

**) 参看 4323 题的推导.

[4457] 证明: 场 $\mathbf{a} = yz(2x+y+z)\mathbf{i} + xz(x+2y+z)\mathbf{j} + xy(x+y+2z)\mathbf{k}$ 是有势场, 并求这个场的势.

提示 只要证明 $\text{rota} = \mathbf{0}$. 又由势 u 满足 $du = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$, 可得 $u = xyz(x+y+z) + C$, 其中 C 为任意常数.

解 由于对空间任一点 (x, y, z) 均有

$$\begin{aligned} \text{rota} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [xy(x+y+2z)] - \frac{\partial}{\partial z} [xz(x+2y+z)] \right\} \mathbf{i} + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [yz(2x+y+z)] - \frac{\partial}{\partial x} [xy(x+y+2z)] \right\} \mathbf{j} \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [xz(x+2y+z)] - \frac{\partial}{\partial y} [yz(2x+y+z)] \right\} \mathbf{k} \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

故 \mathbf{a} 为有势场.

又由于势 u 满足

$$\begin{aligned} du = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} &= yz(2x+y+z)dx + xz(x+2y+z)dy + xy(x+y+2z)dz \\ &\quad - xyz(dx+dy+dz) + (x+y+z)(yzdx + zxdy + xydz) = xyzd(x+y+z) + (x+y+z)d(xyz) \\ &\quad - d[xyz(x+y+z)], \end{aligned}$$

故势 $u = xyz(x+y+z) + C$, 其中 C 为任意常数.

[4458] 求由位于坐标原点的质量 m 所产生的引力场 $\mathbf{a} = -\frac{m}{r^3}\mathbf{r}$ 的势.

解 由于 $du = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{m}{r^3}(x dx + y dy + z dz) = -\frac{m}{2r^3}d(r^2) = -\frac{m}{r^2}dr = d\left(-\frac{m}{r}\right)$,

故势 $u = \frac{m}{r} + C$ (C 为任意常数). 通常取 $u = \frac{m}{r}$ ($r \neq 0$).

[4459] 求质量 m_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的质点位于点 M_i ($i=1, 2, \dots, n$), 求此质点系所产生的引力场的势.

解 引力场 $\mathbf{a} = -\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i$, 其中 r_i 为动点 M 与 M_i 之间的距离. 由于

$$du = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}\right),$$

故势 $u = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i} + C$ (C 为任意常数), 通常取 $u = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}$.

【4460】 证明: 场 $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$ (其中 $f(r)$ 是单值连续函数) 是有势场. 求这个场的势.

解 利用 4436 题(2)的结果, 即知 $\text{rot}(f(r)\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, 故 \mathbf{a} 为有势场. 又由于

$$d\mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = x f(r) dx + y f(r) dy + z f(r) dz = \frac{1}{2} f(r) d(r^2) = r f(r) dr,$$

故势 $u = \int_{r_0}^r t f(t) dt$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

【4461】 证明公式: $\text{grad}_P \left(\iiint_V \rho(Q) \frac{dV}{r} \right) = - \iint_S \rho(Q) \mathbf{n} \frac{dS}{r} + \iiint_V \text{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}$,

其中 S 为区域 V 的边界曲面, \mathbf{n} 为曲面 S 的外法向量, r 为点 $P(x, y, z)$ 与点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ 之间的距离.

证 首先指出, 题中需假定 $\rho(Q)$ 在 V 上具有连续的导数.

(i) 先设点 $P(x, y, z)$ 在 V 之外. 令

$$f(x, y, z) = \iiint_V \rho(Q) \frac{dV}{r}. \quad (1)$$

显然, 右端积分的被积函数对参变量 x, y, z 都具有连续的偏导数, 故可在积分号下求导数, 得

$$\text{grad}_P f = \iiint_V \rho(Q) \text{grad}_P \frac{1}{r} dV. \quad (2)$$

又由于

$$\text{grad}_P \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\text{grad}_Q \frac{1}{r}, \quad \mathbf{r} = \overrightarrow{QP}$$

代入(2)式, 得

$$\text{grad}_P f = - \iiint_V \rho(Q) \text{grad}_Q \frac{1}{r} dV. \quad (3)$$

在公式(4408 题(4)) $\text{grad}_Q(\varphi\psi) = \varphi \text{grad}_Q \psi + \psi \text{grad}_Q \varphi$ 中, 令 $\varphi = \rho(Q)$, $\psi = \frac{1}{r}$, 再代入(3)式, 得

$$\text{grad}_P f = - \iiint_V \text{grad}_Q \left(\rho(Q) \frac{1}{r} \right) dV + \iiint_V \text{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}. \quad (4)$$

根据奥氏公式, 有

$$\iiint_V \text{grad}_Q \left(\rho(Q) \frac{1}{r} \right) dV = \iint_S \rho(Q) \mathbf{n} \frac{dS}{r}. \quad (5)$$

将上式代入(4), 即得

$$\text{grad}_P f = - \iint_S \rho(Q) \mathbf{n} \frac{dS}{r} + \iiint_V \text{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}.$$

(ii) 现设点 $P(x, y, z)$ 在 V 的内部. 仍按(1)式令 $f(x, y, z)$. 注意, 这时(1)式右端的积分为广义重积分 (点 P 为瑕点); 但易知它收敛, 因为在以 P 点为中心, ϵ 为半径的球域 V_ϵ 上的积分满足 ($M = \max_{Q \in V} |\rho(Q)|$)

$$\left| \iiint_{V_\epsilon} \frac{\rho(Q)}{r} dV \right| \leq \iiint_{V_\epsilon} \frac{|\rho(Q)|}{r} dV \leq M \iiint_{V_\epsilon} \frac{dV}{r} = M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\epsilon \frac{r^2}{r} dr = 2M\pi\epsilon^3 \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow +0).$$

我们证明: 这时仍可将(1)式的积分在积分号下求导数而得(2)式. 事实上, 由于

$$\begin{aligned} \left| \iiint_{V_\epsilon} \rho(Q) \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} dV \right| &\leq \iiint_{V_\epsilon} \left| \rho(Q) \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} \right| dV = \iiint_{V_\epsilon} \left| -\rho(Q) \frac{x - \xi}{r^3} \right| dV \leq M \iiint_{V_\epsilon} \frac{dV}{r^2} \\ &= M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\epsilon \frac{r^2}{r^2} dr = 4M\pi\epsilon, \end{aligned}$$

故积分 $\iiint_V \rho(Q) \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} dV$ 关于 x 一致收敛. 于是, (1)式右端的积分可在积分号下关于 x 求偏导数, 得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \iiint_V \rho(Q) \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} dV. \quad (6)$$

同理可得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \iiint_V \rho(Q) \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} dV. \quad (7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \iiint_V \rho(Q) \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} dV. \quad (8)$$

由(6),(7),(8)三式,即得(2)式,仿(i)段办法,可得(3)式与(4)式(注意,仿前,可知(4)式右端两个积分都收敛),但不能直接对 V 应用奥式公式而得(5)式,因为有瑕点 P ,但显然可对 $V - V_\epsilon$ 应用奥式公式,得

$$\iiint_{V-V_\epsilon} \operatorname{grad}_Q \left(\frac{\rho(Q)}{r} \right) dV = \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) \mathbf{n} \frac{dS}{r} \quad (9)$$

其中 S_ϵ 为球域 V_ϵ 的边界(球面),在 S_ϵ 上的 \mathbf{n} 是指向点 P 的.由于

$$\left| \iint_{S_\epsilon} \rho(\theta) \mathbf{n} \frac{dS}{r} \right| \leq \sqrt{3} \iint_{S_\epsilon} |\rho(\theta)| \frac{dS}{r} \leq \sqrt{3} M \iint_{S_\epsilon} \frac{dS}{r} = \frac{\sqrt{3} M}{\epsilon} \iint_{S_\epsilon} dS = \frac{\sqrt{3} M}{\epsilon} 4\pi\epsilon^2 = 4\sqrt{3} \pi M \epsilon,$$

故 $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{S_\epsilon} \rho(\theta) \mathbf{n} \frac{dS}{r} = 0$. 于是,在(9)式两端令 $\epsilon \rightarrow +0$ 取极限,即得(5)式.以(5)式代入(4)式,最后得所要证的公式

$$\operatorname{grad}_P \left\{ \iiint_V \rho(\theta) \frac{dV}{r} \right\} = - \iint_S \rho(Q) \mathbf{n} \frac{dS}{r} + \iiint_V \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}.$$

证毕.

【4462】 证明:若 $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$, 其中

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta, \quad r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2},$$

则 $\operatorname{div} \mathbf{a} = \rho(x, y, z)$ (假定相应的积分有意义).

证 首先指出,为保证题述的广义重积分(既是无穷积分,又是瑕积分)的存在性以及下面要用到的积分号下求导数的合理性,一般我们需假定: $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ 在全空间具有连续的偏导数,并且当 $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ 充分大时 ($R \geq R_0$), 有

$$|\rho(\xi, \eta, \zeta)| \leq \frac{M}{R^{2+a}}, \quad (1)$$

其中 $M > 0, a > 0$, 是两个常数.

考虑空间任一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$. 用 V_0 表示以 P_0 为中心, 1 为半径的单位球域. 我们先限制点 $P(x, y, z)$ 只在 V_0 中变动. 又用 V_1 表示以 P_0 为中心, 2 为半径的球域, V_2 表示整个空间去掉 V_1 所剩下的部分(无界域). 令

$$u_1(x, y, z) = \iiint_{V_1} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta, \quad (2)$$

$$u_2(x, y, z) = \iiint_{V_2} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta. \quad (3)$$

$$\text{于是,} \quad u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} [u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z)]. \quad (4)$$

(2)式右端为瑕积分,在 4461 题证明的第(ii)段中已证它是收敛的;(3)式右端为无穷积分,下面证明它收敛. 令

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \quad R_1 = \max\{R_0, 2(r_0 + 1)\}.$$

则当 $R \geq R_1$ 时,有 $R \geq R_0$ (从而, (1)式满足), 且 $R \geq 2(r_0 + 1)$. 以 Q 表示点 (ξ, η, ζ) , O 表示原点 $(0, 0, 0)$. 由于三角形两边之和大于第三边,故(注意 $P \in V_0$).

$$R - OQ \leq OP + PQ \leq r_0 + 1 + r \leq \frac{R}{2} + r,$$

从而,

$$\begin{aligned} & \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_1^2} \left| \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} \right| d\xi d\eta d\zeta \leq M \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_1^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r R^{2+a}} \leq 2M \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_1^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{3+a}} \\ & = 2M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{R_1}^{+\infty} \frac{R^2}{R^{3+a}} dR = 2M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{R_1}^{+\infty} \frac{dR}{R^{1+a}} = \frac{8M\pi}{aR_1} < +\infty, \end{aligned} \quad (5)$$

故(3)式右端的无穷积分收敛.

由(4)式知 $u(x, y, z)$ 有定义. 由于 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$, 故我们只要证明

$$\Delta u = \rho(x, y, z). \quad (6)$$

我们证明(3)式右端的无穷积分可在积分号下求导数两次:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta. \quad (8)$$

为此, 只要证明(7)式右端的积分和(8)式右端的积分都关于 $(x, y, z) \in V_0$ 一致收敛. 由于

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\xi - x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\xi - x)^2}{r^5},$$

故仿(5)式之推导, 可得: 当 $R_2 > R_1 = \max\{R_0, 2(r_0 + 1)\}$ 时, 对一切 $(x, y, z) \in V_0$, 有

$$\begin{aligned} & \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_2^2} \left| \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \right| d\xi d\eta d\zeta \leq M \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^2 R^{2+a}} \leq 4M \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{4+a}} = \frac{16M\pi}{(1+a)R_2^{1+a}}, \\ & \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_2^2} \left| \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right| d\xi d\eta d\zeta \leq 4M \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^3 R^{2+a}} \leq 32M \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{5+a}} = \frac{128M\pi}{(1+a)R_2^{2+a}}. \end{aligned}$$

由此可知, (7)式右端的积分和(8)式右端的积分都关于 $(x, y, z) \in V_0$ 一致收敛. 因此, (7)式与(8)式当 $(x, y, z) \in V_0$ 时成立. 同理可证, 当 $(x, y, z) \in V_0$ 时, 有

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta. \quad (10)$$

将(8), (9), (10)三式相加, 即得(注意到 $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$)

$$\Delta u_2 = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \Delta \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta = 0. \quad (11)$$

下面再求 $\Delta u_1 = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u_1)$. 由 4461 题的结果知

$$\operatorname{grad} u_1 = - \iint_{S_1} \rho(Q) \mathbf{n} \frac{dS}{r} + \iiint_{V_1} \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}, \quad (12)$$

其中 S_1 表示 V_1 的边界(球面). 显然, 当 $P(x, y, z) \in V_0$ 时, (12)式右端的第一个积分(曲面积分)的被积函数具有对于 x, y 及 z 的连续偏导数, 故可在积分号下求对于 x, y 及 z 的偏导数. 另外, 仿照 4461 题(ii)段之证可知(12)式右端的第二个积分(三重积分)也可在积分号下求对于 x, y 及 z 的偏导数. 于是, 得

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u_1) = - \iint_{S_1} \operatorname{div}_P \left[\frac{\rho(Q) \mathbf{n}}{r} \right] dS + \iiint_{V_1} \operatorname{div}_P \left[\frac{1}{r} \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \right] dV. \quad (13)$$

利用公式 $\operatorname{div}(\mathbf{ua}) = v \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} v$ (4424 题(3)), 可知(注意到 $\rho(Q) \mathbf{n}$ 及 $\operatorname{grad}_Q \rho(Q)$ 均与 P 无关)

$$\operatorname{div}_P \left[\frac{\rho(Q) \mathbf{n}}{r} \right] = \rho(Q) \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}_P \left(\frac{1}{r} \right) = -\rho(Q) \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) = -\rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right),$$

$$\operatorname{div}_P \left[\frac{1}{r} \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \right] = \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \cdot \operatorname{grad}_P \left(\frac{1}{r} \right) = -\operatorname{grad}_Q \rho(Q) \cdot \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right).$$

代入(13)式, 得

$$\Delta u_1 = \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \iiint_{V_1} \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \cdot \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) dV. \quad (14)$$

由于

$$\operatorname{div}_Q \left[\rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] = \rho(Q) \Delta_Q \left(\frac{1}{r} \right) + \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \cdot \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right),$$

而 $\Delta_Q \left(\frac{1}{r} \right) = 0$ ($Q \neq P$), 故(14)式可写为

$$\Delta u_1 = \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \iiint_{V_1} \operatorname{div}_Q \left[\rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] dV. \quad (15)$$

下面计算(15)式中的三重积分, 用 Ω_ϵ 表示以点 $P(x, y, z)$ 为中心, ϵ 为半径的球域, 其边界(球面)记为 S_ϵ . 对 $V_1 - \Omega_\epsilon$ 应用奥氏公式, 得

$$\begin{aligned} \iiint_{V_1 - \Omega_\epsilon} \operatorname{div}_Q \left[\rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] dV &= \iint_{S_1 - S_\epsilon} \rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS + \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS, \end{aligned} \quad (16)$$

其中 \mathbf{n} 是向外法向量, 从而, 在 S_ϵ 上是指向点 $P(x, y, z)$ 的. 由中值定理知,

$$\begin{aligned} \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS &= - \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) \frac{dS}{r^2} = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) dS \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \cdot \rho(Q_\epsilon) \cdot 4\pi\epsilon^2 = 4\pi\rho(Q_\epsilon), \end{aligned}$$

其中 Q_ϵ 是球面 S_ϵ 上的某一点. 代入(16)式, 得

$$\iiint_{V_1 - \Omega_\epsilon} \operatorname{div}_Q \left[\rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] dV = \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS + 4\pi\rho(Q_\epsilon),$$

两端令 $\epsilon \rightarrow +0$ 取极限, 得

$$\iiint_{V_1} \operatorname{div}_Q \left[\rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] dV = \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS + 4\pi\rho(P),$$

再以此式代入(15)式, 得

$$\Delta u_1 = -4\pi\rho(x, y, z). \quad (17)$$

由(17)式, (11)式以及(4)式, 即得(6)式. 于是, (6)式对一切点 $P(x, y, z) \in V_0$ 成立. 由于 V_0 的中心 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是任意的(可为空间任一点), 故知(6)式对空间任一点都成立. 证毕.

□ □

□ □

□ □

□ □

□ □

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

1□ □ □ □

2□ □ □ □ □

3□ □ □ □ □

4□ □ □ □ □ □ □

5□ □ □ □ □ □ □ □ □

6□ □ □ □

7□ □ □ □ □ □ □ □ □

8□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

9□ □ □ □ □ □ □ □

10□ □ □ □

11□ □ □ □

12□ □ □ □

13□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

14□ □ □ □

15□ □ □ □ □ □

16□ □ □ □ □ □ □ □ □

17□ □ □ □